

XIV OLIMPIADA LATINOAMERICANA DE ASTRONOMÍA Y ASTRONÁUTICA

2 a 8 de octubre de 2022 – Ciudad de Panamá – Panamá



1. Si la nave cae en línea recta hacia la esfera, el tiempo en caer se calcula considerando que la nave está en una trayectoria equivalente a la de una órbita elíptica de excentricidad aproximadamente uno:

$$\epsilon = 0.999$$

Entonces el tiempo en caer, sería la mitad de un periodo en una órbita elíptica de semieje mayor $a = 1UA$, alrededor de una estrella con masa igual a $M = 5.4 \times 10^{30} kg$:

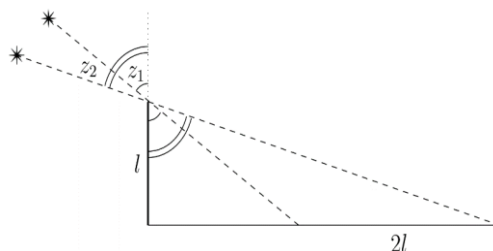
$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 9613635.9s = 111,26 \text{ dias}$$

2. Podemos notar inmediatamente que las regiones ecuatoriales (dentro de los trópicos, donde el Sol pasa por el cenit) no son de interés: tienen una longitud de sombra mínima igual a cero, por lo que el máximo sería igual a dos longitudes del gnomon. Esto significa que el día en que la longitud de la sombra fuera la máxima, el Sol estaría sobre el horizonte a una altura cuya tangente no excedería $1/2$ (y la altura correspondiente resulta ser menor a por lo menos 30°), en las regiones ecuatoriales, esto es imposible.

Tampoco estamos interesados en las regiones polares (en este caso, durante el solsticio de invierno habrá una noche polar, y la longitud máxima de la sombra puede ser arbitrariamente grande). Resolveremos el problema para cualquier hemisferio (por ejemplo, el hemisferio norte), el hemisferio sur tendrá una respuesta "pareja": igual en módulo, pero en latitud con signo opuesto. Teniendo en cuenta tal como se sabe (o se deduce fácilmente), la altura del objeto en la culminación superior es igual a $h = 90^\circ - \phi + \delta$, donde ϕ es la latitud del sitio de observación y δ es la declinación del objeto (en los casos en que culmina al norte del cenit, no estamos interesados por las razones ya mencionadas anteriormente). Entonces la distancia cenital en la culminación superior será igual a $z = 90^\circ - h = \phi - \delta$. La declinación del Sol durante el año varía entre ϵ y $-\epsilon$, donde $\epsilon = 23.4^\circ$, entonces la longitud mínima y máxima de la sombra del mediodía se logrará con distancias cenitales del sol iguales a $z_1 = \phi - \epsilon$ y $z_2 = \phi + \epsilon$, respectivamente.

Construimos un esquema y escribimos la ecuación a partir de las condiciones del problema:

$$l \operatorname{tg} z_2 - l \operatorname{tg} z_1 = 2l$$



La longitud del gnomon l se reduce inmediatamente y no está involucrada en la solución posterior, por lo tanto, el problema se reduce a resolver la ecuación

$$\operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon) - \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon) = 2$$

con respecto a ϕ . Recordando cuál es la diferencia de tangentes, escribimos la ecuación en la forma

$$\frac{\sin(\varphi + \varepsilon - (\varphi - \varepsilon))}{\cos(\varphi + \varepsilon) \cdot \cos(\varphi - \varepsilon)} = 2,$$

de donde (expandiendo los cosenos de la suma y la diferencia)

$$\frac{\sin 2\varepsilon}{2} = (\cos \varphi \cdot \cos \varepsilon - \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon) \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \varepsilon + \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon)$$

$$\frac{\sin 2\varepsilon}{2} = \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \varepsilon - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \varepsilon.$$

Transformando el lado derecho de la igualdad, obtenemos

$$\frac{\sin 2\varepsilon}{2} = \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \varepsilon - (1 - \cos^2 \varphi) \cdot \sin^2 \varepsilon = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varepsilon,$$

De ahí,

$$\cos \varphi = \sqrt{\sin^2 \varepsilon + \frac{\sin 2\varepsilon}{2}}.$$

Con calculadora se puede ya encontrar el valor de $\phi \approx 43,727$

El resultado se puede obtener de muchas otras maneras.

3.

3a.

$$E = L \cdot t = N_{\text{He}} 26.7 \text{ MeV}$$

$$E = L \cdot t = N_{\text{He}} 26.7 \text{ MeV}$$

$$= (3,828 \times 10^{26} \text{ W})(10^{10} \text{ años})(3 \times 10^7 \text{ s})(\text{años}^{-1})$$

$$= 26.7 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J } N_{\text{He}}$$

$$N_{\text{He}} \approx 2.7 \times 10^{55}.$$

Esto corresponde a la masa

3b.

$$M_{\text{He}} = N_{\text{He}} 4 m_p = 2.7 \cdot 10^{55} \cdot 4 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1.8 \times 10^{29} \text{ kg. 0}$$

$$\frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{sol}}} = 0.09 = 9\%$$

3c.

No se produce suficiente He en estrellas como el Sol. Así que debe haber venido de otra fuente. Esta es el Big Bang. El He en el Universo es primordial.

4.

4a. Suponiendo que se ha estado expandiendo a una tasa constante y partiendo de un tamaño inicial insignificante

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta}{t_{edad}} \Rightarrow t_{edad} = \frac{3.4 \cdot 60}{0.21} \text{ años} \approx 970 \text{ años}$$

4b. Si la expansión es esférica, la velocidad a lo largo de la línea de visión debe ser igual a la velocidad en el plano del cielo.

$$v_r = v_\theta = d \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow 1500 \frac{\text{km}}{\text{s}} = d * 0.21 * \frac{\pi}{180 \cdot 60^2} \frac{1}{3 \cdot 10^7 \text{s}} \Rightarrow d = 4.41996 \cdot 10^{16} \text{ km} \approx 1.4 \text{ kpc}$$

4c.

Usando la relación del módulo de distancia tenemos que:

$$m_v - M_v = 5 \log \log d - 5 \Rightarrow m_v = -18 + 5 \log (1.4 \cdot 10^3) - 5 \Rightarrow m_v = -7.3$$

¡Esto es mucho más brillante que cualquier estrella en el cielo!

5.

5a) Este es el caso del exoplaneta Kepler-1625b

Por la tercera ley de Kepler:

$$\frac{\left(\frac{a_p}{1 \text{ AU}}\right)^3}{\left(\frac{P}{1 \text{ y}}\right)^2} = \frac{M_*}{M_{\text{sol}}}$$

$$a_p = \left[0.96 * \left(\frac{287.38}{365.25} \right)^2 \right]^{1/3} = 0.84 \text{ ua}$$

5b)

El tránsito dura desde el momento en que el borde derecho proyectado del planeta toca el borde izquierdo de la estrella (suponiendo un movimiento de izquierda a derecha).

$$\Delta t_{\text{tran}} = 2 \frac{R_* + R_p}{v_p - v_*}.$$

La variación de flujo relativo viene dada por:

$$\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^2 \Rightarrow \frac{R_p}{R_*} = 5.9 \times 10^{-2}. v_p = \frac{2\pi}{P} a_p, v_* = \frac{2\pi}{P} a_* \text{ y } a_p M_p = a_* M_*.$$

Usando $M_p \ll M_*$

$$a_p \gg a_*$$

$$\Delta t_{tran} = (2)(1,059) \frac{R_*}{\frac{2\pi}{P} a_p}$$

$$R_* = \frac{\pi a_p \Delta t_{tran}}{1,059 P} = \frac{\pi (0,84)(1,5 \times 10^{11} m)(18,886 h)}{(1,059)(287,38)(24 h)} = 1,02 \times 10^9 m = \frac{10,2}{6,957} R_{sol}$$

$$R_* = 1,466 R_{sol}$$

$$R_p = 0,059 R_* = 8,65 \times 10^{-2} R_{sol} = 6,018 \times 10^7 m = 0,84 R_J$$

$$5c) M_p < 11,6 M_J = (11,6)(2 \times 10^{27}) kg = 1,16\% R_{sol}$$

Podemos aproximar

$$M_p + M_* \approx M_*$$

Por lo que:

$$R_H = \left(\frac{M_p}{3 M_*} \right)^{\frac{1}{3}} a < \left(11,6 \times 2 \times \frac{10^{27}}{3 \times 2 \times 10^{30}} \right)^{\frac{1}{3}} 0,84 \times 1,5 \times 10^{11} m = 1,98 \times 10^{10} m$$

5d)

La espera más larga será si la luna está en su distancia proyectada más lejana del planeta. Entonces será el momento de cruzar R_H debido a la velocidad relativa de la estrella y el planeta (aquí despreciamos el movimiento de la Luna):

$$\Delta t_{moon} = \frac{R_H}{v} = \frac{\left(\frac{M_p}{3 M_*} \right)^{\frac{1}{3}} a}{\frac{2 \pi a}{P}} < \left(11,6 \times 2 \times \frac{10^{27}}{3 \times 2 \times 10^{30}} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{287,379}{2 \pi} = 7,18 d. \text{ Hasta una semana}$$

$$5e) \text{ El decrecimiento relativo será } \sim \left(\frac{R_{moon}}{R_*} \right)^2 = \left(\frac{2,462 \times 10^7}{1,46 \times 10^8} \right)^2 \approx 6 \times 10^{-4}$$

6.

6a) El telescopio tiene un área de recolección más grande que la pupila del ojo, por lo que recolectará más luz de una fuente determinada. Si una estrella vista a simple vista tiene un brillo B_e , aparecerá con un brillo B_t a través del telescopio:

$$\frac{B_t}{B_e} = \left(\frac{D}{d} \right)^2$$

La energía recogida por el área πD^2 se alimenta así al ojo del área colectora πd^2 .

Como resultado, el ojo ve un objeto de flujo F_e a través del telescopio como si fuera de flujo F_t :

$$\frac{F_t}{F_e} = \left(\frac{D}{d} \right)^2$$

Convirtiendo esto a magnitudes:

$$m_t - m_e = -2,5 \log \log \left(\frac{F_t}{F_e} \right) = -5 \log \log \left(\frac{D}{d} \right)$$

$$6b) m_t = 6 - 0,5 + 5 \log \log \left(\frac{30}{0,8} \right) \approx 13,4$$