

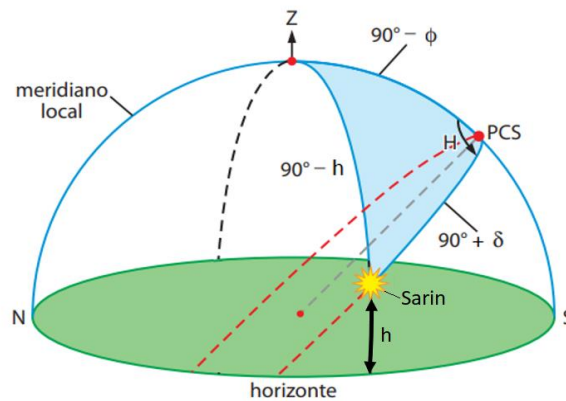
XIII Olimpiada Latino-americana de Astronomía e Astronáutica

25 de octubre al 8 de noviembre de 2021 – Peru (Virtual)



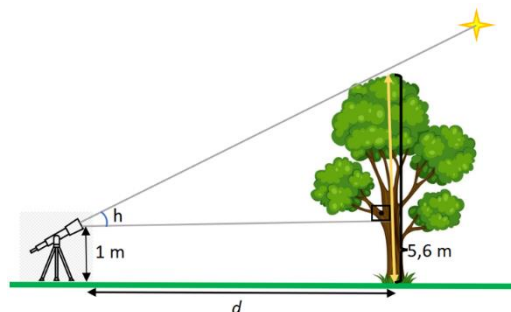
Prueba Teórica Individual – Soluciones

- 1) Representando el triángulo de posición de la estrella Sarín en Lima, bajo las condiciones presentadas en el enunciado, de la Ley de los cosenos para triángulos esféricos, tenemos que la altura h de esta estrella en este instante es:



$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - h) &= \cos(90^\circ - \phi) \cdot \cos(90^\circ + \delta) + \sin(90^\circ - \phi) \cdot \sin(90^\circ + \delta) \cdot \cos H \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin h = -\sin \phi \cdot \sin \delta + \cos \phi \cdot \cos \delta \cdot \cos H \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin h = -\sin 12^\circ 15' \cdot \sin 24^\circ 48' 53,7'' + \cos 12^\circ 15' \cdot \cos 24^\circ 48' 53,7'' \cdot \cos 45^\circ 10' 10,35'' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin h = 0,5366 \Rightarrow h = 32^\circ 27' 22,5''\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia d que debe colocarse el telescopio para ver la estrella exactamente encima del árbol es:



$$\begin{aligned}\tan h &= \frac{5,6 - 1}{d} \Rightarrow d = \frac{4,6}{\tan 32^\circ 27' 22,5''} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{d = 7,2 \text{ m}}\end{aligned}$$

2) a) La pérdida de masa, en masas solares, asociada a la radiación solar (m_r) en el periodo de 1 año es:

$$\left| \begin{array}{l} L = \frac{\Delta E}{\Delta t} \\ \Delta E = m_r \cdot c^2 \end{array} \right. \Rightarrow L = \frac{m_r \cdot c^2}{\Delta t} \Rightarrow m_r = \frac{L \cdot \Delta t}{c^2} = \frac{3,8 \cdot 10^{26} \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600}{(3 \cdot 10^8)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_r = 1,33 \cdot 10^{17} \text{ kg} = 6,66 \cdot 10^{-14} M_{\text{Sol}}$$

Comparando el resultado obtenido con la pérdida de masa por el viento solar ($m_v = 2 \cdot 10^{-14} M_{\text{Sol}}$), concluimos que el Sol pierde más masa por radiación.

b) Considerando que la órbita de la Tierra es circular alrededor del Sol, y que su masa m_T es constante, de la conservación del momento angular (L), tenemos:

$$\left| \begin{array}{l} L = m_T \cdot v \times R \\ v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \end{array} \right. \Rightarrow L = m_T \cdot \sqrt{\frac{GM}{R}} \cdot R \Rightarrow L^2 = m_T^2 \cdot \frac{GM}{R} \cdot R^2 \Rightarrow M \cdot R = \frac{L^2}{G \cdot m_T^2} = \text{cte}$$

c) Durante un período de mil millones de años, el cambio en la masa del Sol será:

$$\Delta M = (6,66 \cdot 10^{-14} M + 2,0 \cdot 10^{-14} M) \cdot 10^9 \Rightarrow \Delta M = 8,66 \cdot 10^{-5} M$$

Como el producto $M \cdot R$ es constante, tenemos que la variación de la distancia Tierra-Sol (ΔR) dentro de mil millones de años será:

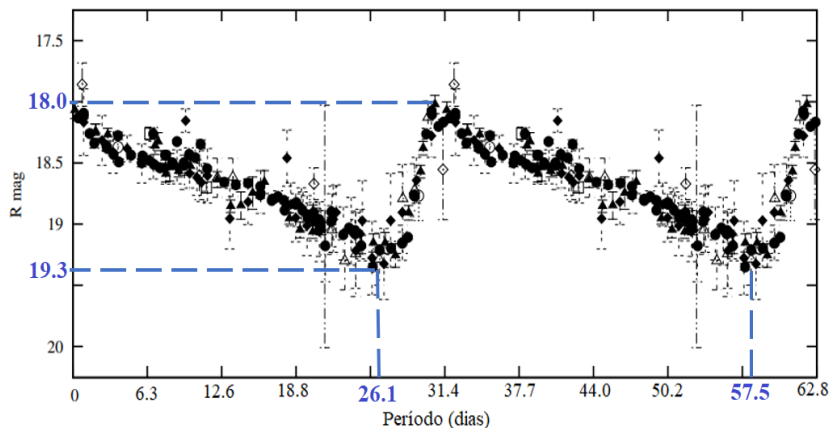
$$M \cdot R = (M - \Delta M) \cdot (R + \Delta R) \Rightarrow M \cdot R = (M - 8,66 \cdot 10^{-5} M) \cdot (R + \Delta R) \Rightarrow \Delta R = 8,66 \cdot 10^{-5} R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta R = 8,66 \cdot 10^{-5} \cdot 1,496 \cdot 10^8 \Rightarrow \Delta R = 1,29 \cdot 10^4 \text{ km} \approx 13000 \text{ km}$$

Por lo tanto, aumentar la distancia Tierra-Sol en unos 13.000 km (un diámetro terrestre), en una escala de tiempo geológico, tendrá poca importancia para los cambios en el clima de la Tierra.

3) Analizando el gráfico, se puede estimar que el período de pulsación de las Cefeidas es:

$$P = 57,5 - 26,1 = 31,4 \text{ dias}; \text{ y su magnitud aparente promedio, aproximadamente, } m_R = \frac{18+19,3}{2} = 18,65.$$



De la relación periodo-luminosidad presentada en el enunciado, y conociendo el índice de color de la estrella, tenemos que su magnitud absoluta en la banda R es:

$$\begin{cases} M_V = -2,81 \log P - 1,43 \\ V - R = 0,4 \end{cases} \Rightarrow M_R + 0,4 = -2,81 \log 31,4 - 1,43 \Rightarrow M_R = -6,036$$

Por lo tanto, de la ecuación de Pogson se obtiene:

$$m_R - M_R = 5 \log d - 5 \Rightarrow 18,65 + 6,036 = 5 \log d - 5 \Rightarrow d = 8,65 \cdot 10^5 \text{ pc} = 0,86 \text{ Mpc}$$

4) Sabiendo que la antena principal del radiotelescopio BINGO tiene 40 m de diámetro, tenemos que, ajustado para trabajar a 1,4 GHz, la longitud de onda de observación será de 21 cm. Por tanto, la separación angular θ será:

$$\sin \theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} = 1,22 \cdot \frac{21 \text{ cm}}{4000 \text{ cm}} \Rightarrow \theta = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 22' 11,14''$$

Para la detección de microondas, la separación angular θ' es:

$$\sin \theta' = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} = 1,22 \cdot \frac{3,2 \text{ cm}}{4000 \text{ cm}} \Rightarrow \theta' = 9,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 3' 21,31''$$

5) a) Para que el cometa escape en el perihelio, la energía mecánica en este punto debe ser igual a cero, entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m \cdot v_{\text{esc}}^2}{2} - \frac{G \cdot M_{\text{Sol}} \cdot m}{r} \Rightarrow v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{Sol}}}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{0,914 \cdot 1,496 \cdot 10^{11}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_{\text{esc}} = 44,172 \cdot 10^3 \text{ m/s} \Rightarrow v_{\text{esc}} = 44,172 \text{ km/s} \end{aligned}$$

b) De la energía mecánica del sistema, tenemos que la ecuación que describe la velocidad del cometa en su órbita elíptica alrededor del Sol es:

$$-\frac{G \cdot M_{\text{Sol}} \cdot m}{2a} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{G \cdot M_{\text{Sol}} \cdot m}{r} \Rightarrow v^2 = GM_{\text{Sol}} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Por lo tanto, el semieje mayor a de la órbita del cometa es:

$$\begin{aligned} v^2 &= GM_{\text{Sol}} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow (44 \cdot 10^3)^2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot \left(\frac{2}{0,914 \cdot 1,496 \cdot 10^{11}} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = 8,76 \cdot 10^{12} \text{ m} = 58,557 \text{ UA} \end{aligned}$$

Por tanto, la distancia d del cometa al perihelio será:

$$d = 2a - r = 58,557 - 0,914 \Rightarrow d = 116,2 \text{ UA}$$

c) Considerando la interacción únicamente con el Sol, cuando el cometa pase cerca de Júpiter, su velocidad v_0 será:

$$v_0^2 = GM_{\text{Sol}} \cdot \left(\frac{2}{r'} - \frac{1}{a} \right) = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot \left(\frac{2}{5,21,496 \cdot 10^{11}} - \frac{1}{58,557,1,496 \cdot 10^{11}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = 18,103 \text{ km/s}$$

Comparando la energía mecánica del cometa cerca de Júpiter (índice 1) con su energía mecánica en el perihelio en situación de escape (índice 2), tenemos que su velocidad (v_1), cerca de Júpiter, para escapar del Sistema Solar será:

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} - \frac{G \cdot M_{\text{Sol}} \cdot m}{r_1} = \frac{m \cdot v_{\text{esc}}^2}{2} - \frac{G \cdot M_{\text{Sol}} \cdot m}{r_2} \Rightarrow v_1^2 = v_{\text{esc}}^2 + 2GM_{\text{Sol}} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow$$

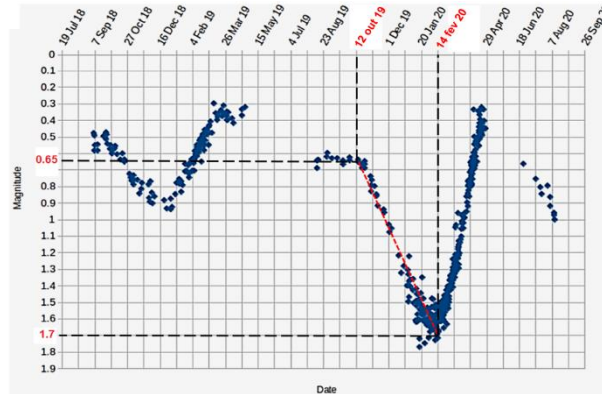
$$\Rightarrow v_1^2 = (44172)^2 + 2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot \left(\frac{1}{5,21,496 \cdot 10^{11}} - \frac{1}{0,914,1,496 \cdot 10^{11}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = 18,518 \text{ km/s}$$

Por tanto, al pasar cerca de Júpiter, su variación de velocidad debería ser:

$$\Delta v = v_1 - v_0 = 18,518 - 18,103 \Rightarrow \Delta v = 0,415 \text{ km/s}$$

6) Analizando la gráfica, notamos que Betelgeuse se expandió entre el 12 de octubre de 2019 y el 14 de febrero de 2020, es decir, durante 125 días. En este período, su magnitud aumentó de 0,65 a 1,7.



De la ecuación general de magnitudes y la ley de Stefan-Boltzmann, tenemos que la relación entre los radios de Betelgeuse al final de la expansión R_2 y al comienzo R_1 (radio típico) es:

$$\left| \begin{array}{l} m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log \left(\frac{L_1}{L_2} \right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4 \right] \Rightarrow \\ L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,65 - 1,7 = -2,5 \cdot \log \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{3500}{2625} \right)^4 \right] \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 0,9123 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 1,0961$$