

XI Olimpiada Latino-americana de Astronomía y Astronáutica
21 a 25 de octubre de 2019 – Puebla – México
Prueba Teórica Individual – Soluciones



1) a) La resolución angular del telescopio JWST (θ_J) viene dada por:

$$\theta_J = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D_J} = 1,22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}}{6,5} \Rightarrow \theta_J = 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

b) Considerando la pequeña resolución angular, tenemos $\text{tg} \theta \approx \theta$. Si las estrellas analizadas están a una distancia $r = 3 \cdot 10^6 \text{ al}$, i) El valor de S para el telescopio JWST (S_J) es:

$$\text{tg} \theta = \frac{S}{r} \Rightarrow S = \theta \cdot r$$

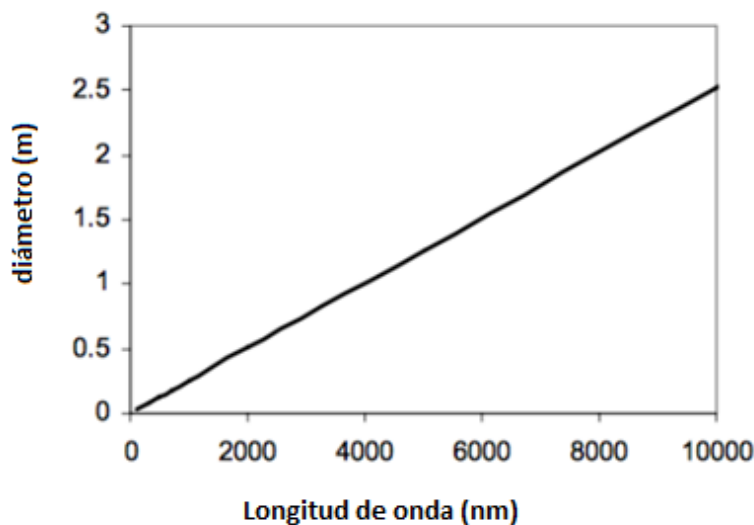
$$S_J = \theta_J \cdot r = 1,03 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^6 \Rightarrow S_J = 0,309 \text{ al}$$

ii) Para el telescopio Hubble, tenemos:

$$\theta_H = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D_H} = 1,22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}}{2,4} \Rightarrow \theta_H = 2,79 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

$$S_H = \theta_H \cdot r = 2,79 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^6 \Rightarrow S_H = 0,839 \text{ al}$$

c) A partir de los datos presentados y la ecuación de resolución angular, tenemos:



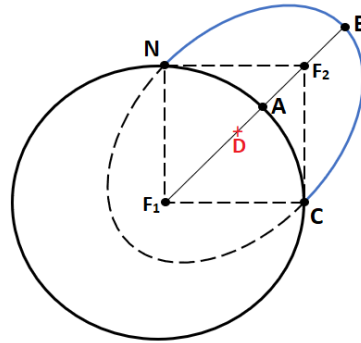
d) Considerando que el cuerpo humano subtende un ángulo $\theta = 1''$ y emite energía infrarroja de $10 \mu\text{m}$, para distinguirlo se debe tener un telescopio con un espejo primario con un diámetro mínimo de $D = 2,52 \text{ m}$. Como el telescopio Hubble tiene $D_H < D$, no **puede** distinguir a un humano por emisión de calor.

2) a) Considerando el sistema conservativo, para el punto N, tenemos:

$$E_T = K + U \Rightarrow -\frac{Gmm}{2a} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow -\frac{Gmm}{2a} = \frac{m}{2} \cdot \frac{GM}{R_T} - \frac{GMm}{R_T} \Rightarrow a = R_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 6371 \text{ km}$$

b) Siendo el punto D el centro de la elipse con focos F_1 y F_2 , y también el centro del cuadrado NF_1CF_2 con lado R_T , resulta:



Note:

$$F_1F_2 = R_T \cdot \sqrt{2}$$

$$F_1A = R_T$$

$$DF_2 = \frac{R_T \sqrt{2}}{2}$$

$$DB = a = R_T$$

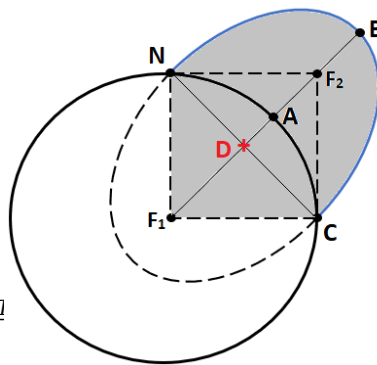
A partir de la geometría del sistema, la distancia AD viene dada por:

$$F_1A - AD + DF_2 = F_1F_2 \Rightarrow R_T - AD + \frac{R_T \sqrt{2}}{2} = R_T \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} R_T$$

Por tanto, la distancia AB, que equivale a la altura máxima h , vendrá dada por:

$$AD + AB = DB \Rightarrow \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} R_T + h = R_T \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} R_T = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6371 \Rightarrow h = 4505 \text{ km}$$

c) Recordando que el área de la elipse viene dada por $S = \pi \cdot ab$, donde b es el semieje menor; el área A de la figura sombreada es:



$$A = \frac{\pi a b}{2} + \frac{R_T^2}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi R_T^2}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(\pi \sqrt{2} + 2)}{4} \cdot R_T^2$$

Aplicando la 3ª Ley de Kepler y considerando la gravedad constante g durante el vuelo, tenemos que el periodo orbital P de la órbita es:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \\ g = \frac{GM_T}{R_T^2} \end{array} \Rightarrow \frac{P^2}{R_T^3} = \frac{4\pi^2}{g \cdot R_T^2} \Rightarrow P = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} \right.$$

Ley de Kepler, tenemos que el tiempo de vuelo será:

$$\begin{aligned} \frac{A_{Total}}{P} &= \frac{A}{t} \Rightarrow \frac{\pi ab}{P} = \frac{A}{t} \Rightarrow t = \frac{AP}{\pi ab} \Rightarrow t = \frac{(\pi\sqrt{2}+2)}{4} \cdot R_T^2 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} \cdot \frac{2}{\pi \cdot R_T \cdot R_T \sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{R_T}{g}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{\pi\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{637110^3}{9,8}} \Rightarrow \boxed{t = 3672 \text{ s} \approx 1,02 \text{ h}} \end{aligned}$$

3) a) El flujo luminoso de la estrella Ciro (F_C) a una distancia a_1 , es:

$$F_C = \frac{L_C}{4\pi \cdot a_1^2} = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot a_1^2} \Rightarrow F_C = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_1^2}$$

Por tanto, la potencia recibida (P_R) por el planeta Umi de radio r es:

$$F_C = \frac{P_R}{\pi \cdot r^2} \Rightarrow \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_1^2} = \frac{P_R}{\pi \cdot r^2} \Rightarrow P_R = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot r^2}{a_1^2}$$

Considerando al planeta Umi como un cuerpo negro ideal ($\varepsilon = 1$) en equilibrio térmico, tenemos que la potencia recibida es igual a la potencia emitida (P_E), entonces:

$$\left| \begin{array}{l} P_E = \varepsilon 4\pi r^2 \sigma T_U^4 \\ P_R = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot r^2}{a_1^2} \end{array} \Rightarrow \varepsilon 4\pi r^2 \sigma T_U^4 = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot r^2}{a_1^2} \Rightarrow \boxed{T_U = T \cdot \sqrt{\frac{R}{2a_1}}} \right.$$

b) Comparando los datos de un astrónomo en Umi observando la estrella Cyrus, con los datos de un astrónomo en la Tierra observando el Sol, de la ecuación general de magnitudes, obtenemos:

$$m_1 - m_S = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{F_C}{F_S}\right) \Rightarrow m_1 - m_S = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot a_1^2} \cdot \frac{4\pi \cdot a_S^2}{4\pi R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4}\right) \Rightarrow m_1 - m_S = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{R^2 a_S^2 T^4}{R_S^2 a_1^2 T_S^4}\right)$$

A partir de la ecuación que se encuentra en el punto a, podemos reescribir la ecuación anterior:

$$\left| \begin{array}{l} T^4 = \frac{4 \cdot T_U^4 \cdot a_1^2}{R^2} \\ m_1 - m_S = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{R^2 a_S^2 T^4}{R_S^2 a_1^2 T_S^4}\right) \end{array} \Rightarrow m_1 - m_S = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{4 \cdot a_S^2 T_U^4}{R_S^2 T_S^4}\right) \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow (-27) - (26,72) = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{4 \cdot (1,49 \cdot 10^{11})^2 \cdot T_U^4}{(6,95 \cdot 10^8)^2 \cdot (5778)^4}\right) \Rightarrow \boxed{T_U = 354,6K}$$

c) La potencia emitida por Eki (P'_E) viene dada por:

$$\left| \begin{array}{l} F_C = \frac{L_C}{4\pi a_2^2} = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_2^2} \\ F_C = \frac{P'_E}{\pi r_2^2} \Rightarrow \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_2^2} = \frac{P'_E}{\pi r_2^2} \Rightarrow P'_E = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi r_2^2}{a_2^2} \\ P'_E = P'_R \end{array} \right.$$

Considerando que el diámetro angular de Eki es θ , visto desde la distancia d para un observador en Umi, tenemos que el radio r_2 de Eki se puede expresar por:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r_2}{d} \Rightarrow r_2 = d \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Por lo tanto, el flujo luminoso que recibe Umi de Eki es:

$$\left| \begin{array}{l} F = \frac{P'_E}{4\pi d^2} \\ P'_E = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi r_2^2}{a_2^2} \Rightarrow F = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi}{a_2^2 \cdot 4\pi d^2} \cdot \left(d \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow F = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4a_2^2} \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ r_2 = d \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right.$$

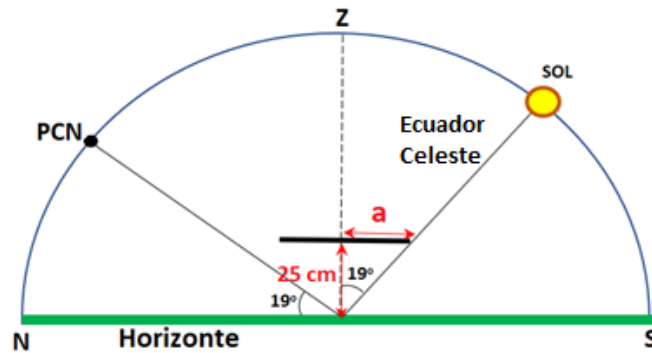
d) Comparando las magnitudes aparentes de Eki y Ciro, para un observador en Umi, de la ecuación general de magnitudes, tenemos:

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{F}{F_C}\right) \Rightarrow m_2 - m_1 = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{\frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4a_2^2} \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_1^2}}\right) \Rightarrow m_2 - m_1 = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{a_1^2}{4a_2^2} \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_2 - m_1 = -5 \cdot \log\left(\frac{a_1}{2a_2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot 10^{\left(\frac{m_2 - m_1}{-5}\right)} \end{aligned}$$

e) De la 3ª Ley de Kepler, tenemos:

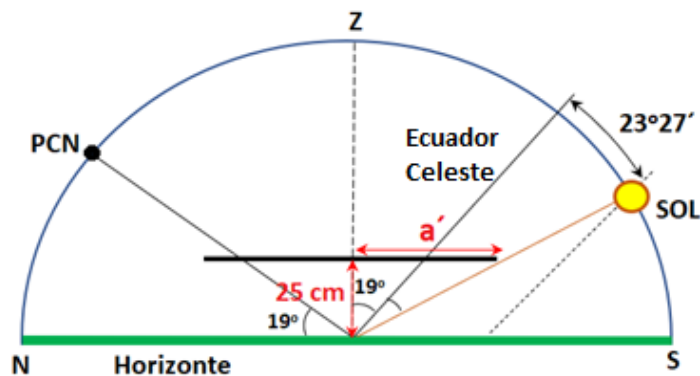
$$\begin{aligned} \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 &= \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot 10^{\left(\frac{m_2 - m_1}{-5}\right)}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{423}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{\operatorname{tg}\left(\frac{20''}{2}\right)} \cdot 10^{\left(\frac{-2,6+27}{-5}\right)}\right)^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_2 = 918,6 \text{ días terrestres} \end{aligned}$$

4) a) Esquemáticamente, para el Sol del mediodía del 21 de marzo (equinoccio) en la ciudad de Puebla ($\phi = 19^\circ \text{ N}$), tenemos:



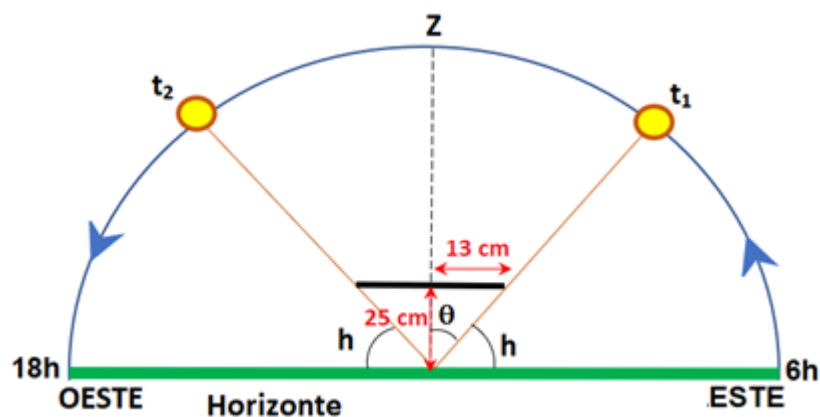
$$\operatorname{tg} 19^\circ = \frac{a}{25} \Rightarrow a = 8,61 \text{ cm}$$

b) La situación más crítica ocurrirá cuando el Sol tenga la altura más baja, al mediodía, con relación al horizonte. Este evento tendrá lugar cerca del 21 de diciembre (solsticio de invierno para el Hemisferio Norte) cuando la declinación del Sol sea $-23^\circ 27'$, esquemáticamente tenemos:



$$\operatorname{tg}(19^\circ + 23^\circ 27') = \frac{a'}{25} \Rightarrow a' = 22,87 \text{ cm}$$

c) Como Citlali está en el Ecuador ($\phi = 0^\circ$) el 21 de septiembre (equinoccio), tenemos que la altura h del Sol a la que su sombrero cumple el propósito de proteger todo su rostro es:



$$\left| \begin{array}{l} h + \theta = 90^\circ \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{13}{25} \end{array} \right. \Rightarrow h = 90^\circ - 27,47^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 62,52^\circ$$

Sabiendo que en Ecuador, el 21 de septiembre el Sol sale alrededor de las 6:00 am y se pone a las 6:00 pm, los momentos t_1 y t_2 en que el Sol estará alto h son respectivamente:

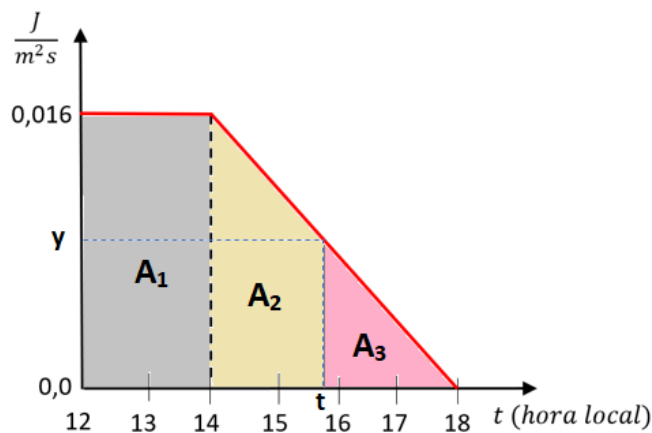
$$t_1 = 6h + 62,52^\circ \cdot \frac{12h}{180^\circ} \Rightarrow t_1 = 10h10 \text{ min } 4,8s$$

$$t_2 = 18h - 62,52^\circ \cdot \frac{12h}{180^\circ} \Rightarrow t_2 = 13h49 \text{ min } 55,2s$$

Por ello, el sombrero hará su función de **10:10 a 13:50 horas**.

d) El lapso de tiempo necesario para que Citlali sufra quemaduras será el tiempo t en que el área de la gráfica corresponde al valor 200 J/m^2 (recordando que el sombrero absorbe la mitad de la radiación). Analizando la gráfica tenemos:

- El área total del gráfico es:



$$A_{\text{total}} = \frac{(6 + 2) \cdot 0,016}{2} \cdot 3600 = 230,4 \frac{J}{m^2}$$

- La zona correspondiente entre las 12:00 y las 14:00 es:

$$A_1 = 2 \cdot 0,016 \cdot 3600 = 115,2 \frac{J}{m^2}$$

- El área correspondiente entre las horas 14:00 y t :

$$A_2 = 200 - 115,2 = 84,8 \frac{J}{m^2}$$

- La zona correspondiente entre los horarios t y las 18:00:

$$A_3 = A_{\text{total}} - (A_1 + A_2) = 230,4 - (115,2 + 84,8) = 30,4 \frac{J}{m^2}$$

- De la proporción de la gráfica, tenemos que la relación entre t y y es tal que:

$$\frac{18-t}{18-14} = \frac{y-0}{0,016-0} \Rightarrow y = 0,004 \cdot (18-t) \quad [1]$$

- Entre ahora t y las 6 pm, es válido que:

$$A_3 = \frac{(18-t) \cdot y}{2} \Rightarrow 30,4 = \frac{(18-t) \cdot y}{2} \cdot 3600 \quad [2]$$

- De las ecuaciones [1] y [2], se obtiene:

$$\left| \begin{array}{l} y = 0,004 \cdot (18-t) \\ 30,4 = \frac{(18-t) \cdot y}{2} \cdot 3600 \end{array} \right. \Rightarrow 30,4 = \frac{y}{0,004} \cdot \frac{y}{2} \cdot 3600 \Rightarrow y = 0,00822 \frac{J}{m^2 \cdot s} \quad \text{e} \quad t = 15,94h$$

Por eso, **a partir de las 16 horas**, Citlali sufrirá quemaduras por la exposición excesiva al Sol.