

X Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica

14 al 20 de octubre de 2018 – Ayolas – Paraguay



Prueba Teórica Individual – Soluciones

1) Según el comunicado, tenemos la siguiente información:

$$V_1 = V_2, r_1 = \frac{d}{4}, r_2 - r_1 = 519,84 \text{ km}, \rho_1 = 9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{ y } \rho_3 = 3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \rho_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

a) Para obtener la aceleración en la superficie del planeta, debemos obtener la masa total de este cuerpo, así como el espesor de las capas que rodean el núcleo (figura 1). Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones, considerando las masas de cada capa y sus respectivas densidades.

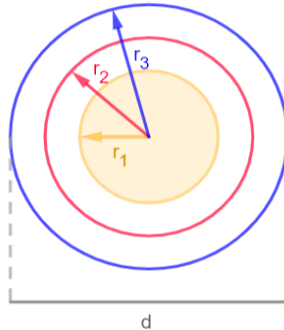


Figura 1

$$\begin{cases} M_1 = \rho_1 \cdot V_1 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r_1^3 \\ M_2 = \rho_2 \cdot V_2 = \rho_2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi (r_2^3 - r_1^3) \\ M_3 = \rho_3 \cdot V_3 = \rho_3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi (r_3^3 - r_2^3) \end{cases}$$

De la comparación entre V_1 y V_2 , tenemos:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi (r_2^3 - r_1^3) = \frac{4}{3} \cdot \pi r_1^3 \Rightarrow r_2^3 = 2r_1^3 \therefore r_2 = \sqrt[3]{2} r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 - r_1 = 519,84 \Rightarrow 1,26r_1 - r_1 = 519,84 \therefore r_1 = 1\,999,38 \text{ km} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = 1,26 r_1 \therefore r_2 = 2\,519,22 \text{ km}$$

De la relación entre el diámetro y el radio del núcleo del planeta, tenemos:

$$r_1 = \frac{d}{4} = \frac{2r_3}{4} \Rightarrow r_3 = 2r_1 \therefore \boxed{r_3 = 3\,998,76 \text{ km}}$$

Aplicando los valores de r_1 , r_2 y r_3 a las masas, obtenemos que:

$$\begin{cases} M_1 = 9,00 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2,00 \cdot 10^6)^3 \\ M_2 = 5,00 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot [(2,52 \cdot 10^6)^3 - (2,00 \cdot 10^6)^3] \\ M_3 = 3,00 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi [(4,00 \cdot 10^6)^3 - (2,52 \cdot 10^6)^3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1 \approx 3,02 \cdot 10^{23} \text{ kg} \\ M_2 \approx 1,67 \cdot 10^{23} \text{ kg} \\ M_3 \approx 6,03 \cdot 10^{23} \text{ kg} \end{cases}$$

$$\therefore M_{TOTAL} = M_1 + M_2 + M_3 = 1,07 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Por lo tanto, en la superficie del planeta, la aceleración g_s será:

$$g_s = \frac{GM}{r_3^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,07 \cdot 10^{24}}{(4 \cdot 10^6)^2} \therefore \boxed{g_s = 4,47 \text{ m/s}^2}$$

b) Por simetría, en el centro del planeta, toda la masa se distribuye alrededor de este punto. Por tanto, considerando que las capas que constituyen el planeta son homogéneas, podemos decir que $g_{centro} = 0$.

c) Análogamente al punto anterior, sólo el núcleo y la capa intermedia ejercerán atracción gravitatoria sobre la separación entre la capa intermedia y la capa exterior del planeta. De esta forma, tendremos el siguiente valor:

$$g_{int} = \frac{G(M_1 + M_2)}{r_2^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (3,02 \cdot 10^{23} + 1,67 \cdot 10^{23})}{(2,52 \cdot 10^6)^2} \therefore \boxed{g_{int} \approx 4,92 \text{ m/s}^2}$$

2) a) En este caso, el proceso de desplazamiento de la línea de 5 985 Å ocurre cada 7 días. Por tanto, podemos decir que el periodo de traslación de la estrella será **de 7 días**.

b) Del efecto Doppler obtenemos las velocidades de aproximación y salida de la estrella en relación con nuestra línea de visión.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \Rightarrow \begin{cases} v_{azul} = \frac{5\,975 - 5\,985}{5\,985} \cdot 3 \cdot 10^8 \\ v_{red} = \frac{6\,000 - 5\,985}{5\,985} \cdot 3 \cdot 10^8 \end{cases} \therefore \begin{cases} v_{azul} = -5,01 \cdot 10^5 \text{ m/s} \\ v_{red} = 7,52 \cdot 10^5 \text{ m/s} \end{cases}$$

Aplicando la 2ª Ley de Kepler, sabemos que la velocidad orbital de la estrella será máxima en el perihelio y mínima en el afelio, lo que nos permite concluir:

$$\boxed{\begin{cases} v_a = 5,01 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_p = 7,52 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}}$$

c) A partir de las velocidades del afelio y perihelio, es posible obtener la excentricidad (e) de la órbita estelar. Para esto, podemos deducir la relación a partir de la expresión de la velocidad orbital.

$$v(r) = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \text{ donde } \begin{cases} r_p = a(1 - e) \\ r_a = a(1 + e) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(r_p) = v_p = \sqrt{GM \left[\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right]} \\ v(r_a) = v_a = \sqrt{GM \left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a} \right]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \left[\frac{2-(1-e)}{(1-e)} \right]} \\ v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \left[\frac{2-(1+e)}{(1+e)} \right]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)} \\ v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_p}{v_a} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1+e}{1-e} \right)}{\left(\frac{1-e}{1+e} \right)}} \Rightarrow \frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow \frac{7,52 \cdot 10^5}{5,01 \cdot 10^5} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow 7,52 - 7,52e = 5,01 + 5,01e \quad \therefore e = 0,20$$

3) a) Para obtener la magnitud absoluta de cada sistema binario, debemos calcular sus magnitudes aparentes. En el caso de estrellas con magnitudes $m_a = +1$ y $m_b = +2$, la relación entre flujos la obtenemos a partir de la Ecuación General de magnitudes.

$$m_a - m_b = -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_a}{F_b} \right) \Rightarrow 1 - 2 = -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_a}{F_b} \right) \Rightarrow F_a = F_b \cdot 10^{0,4} \therefore F_a = 2,512 F_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{ab} - m_b = -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_a + F_b}{F_b} \right) \Rightarrow m_{ab} = 2 - 2,5 \cdot \log(3,512) \therefore m_{ab} \approx 0,64$$

Para la magnitud absoluta M_{ab} se utiliza la Ecuación de Pogson.

$$m_{ab} - M_{ab} = 5 \cdot \log(d_{pc}) - 5 \Rightarrow M_{ab} = 0,64 + 5 - 5 \cdot \log \left(\frac{20}{3,26} \right) \therefore M_{ab} \approx 1,92$$

Análogamente, para estrellas con magnitudes $m_c = 3$ y $m_d = 4$, tenemos:

$$m_c - m_d = -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_c}{F_d} \right) \Rightarrow F_c = F_d \cdot 10^{0,4} \therefore F_c = 2,512 F_d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{cd} - m_d = -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_c + F_d}{F_d} \right) \Rightarrow m_{cd} = 4 - 2,5 \cdot \log(3,512) \therefore m_{cd} = 2,64$$

$$\Rightarrow m_{cd} - M_{cd} = 5 \cdot \log(d_{pc}) - 5 \Rightarrow M_{cd} = 2,64 + 5 - 5 \cdot \log \left(\frac{60}{3,26} \right) \therefore M_{cd} \approx 1,31$$

b) La magnitud aparente de las cuatro estrellas (m_{SIST}) se puede determinar mediante la ecuación de magnitud general.

$$m_{ab} - m_{cd} = -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_{ab}}{F_{cd}} \right) \Rightarrow 0,64 - 2,64 = -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_{ab}}{F_{cd}} \right) \Rightarrow \frac{F_{ab}}{F_{cd}} = 10^{0,8} \therefore F_{ab} = 6,31 F_{cd} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{SIST} - m_{cd} = -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_{ab} + F_{cd}}{F_{cd}} \right) \Rightarrow m_{SIST} = 2,64 - 2,5 \cdot \log(7,31) \therefore m_{SIST} = 0,48$$

4) La estructura descrita por el enunciado del problema se ve en la figura 2.

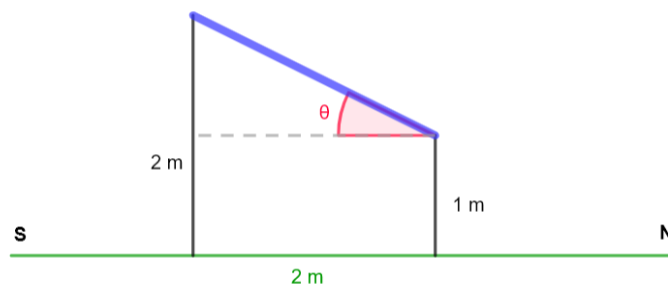


Figura 2

a) Como el telescopio está orientado al punto cardinal sur, al llegar a la culminación, la estrella también estará en dirección sur. Usando el criterio del problema, tenemos $A = 0$.

b) Al final del campo de visión del telescopio, la estrella estará a una altura equivalente al ángulo entre el telescopio y el horizonte. De la figura 2, concluimos que:

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = h_* = 26^\circ 33' 54''$$

c) Al comparar con la latitud del lugar ($\phi = 27^\circ 19' S$), se nota que la estrella se encuentra debajo del Polo Sur Celeste. Por lo tanto, está en la culminación más baja y por lo tanto $H = 12 h$.

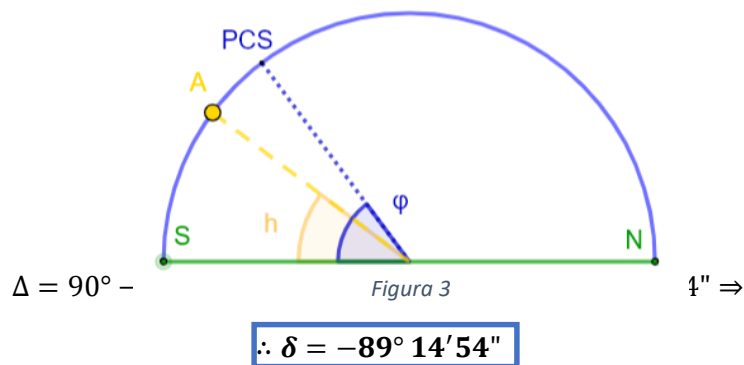
d) Para determinar la ascensión recta de la estrella, podemos compararla con el Tiempo Sideral Local (TSL).

$$TSL = H + \alpha$$

Se TSL puede determinar utilizando la longitud (λ) y la hora sideral de Greenwich (TSG):

$$TSG + \lambda = TSL \Rightarrow TSL = 01 h 16 min + (56^\circ 21') = 01 h 16 min + 03 h 45 min 24 s \therefore TSL = 05 h 01 min 24 s \\ \Rightarrow 05 h 01 min 24 s = 12 h 00 min + \alpha \therefore \alpha = 17 h 01 min 24 s$$

e) La declinación de la estrella puede ser determinada por la distancia polar (Δ), como se puede observar en la figura 3. Recordando que la distancia polar es un ángulo suplementario a la declinación (δ), tenemos que:



Recordando que, debido a que la estrella se encuentra entre el Ecuador y el Polo Sur Celeste, la coordenada de la estrella tendrá signo negativo.

f) De la figura 3: $\Delta = 27^\circ 19' - 26^\circ 33' 54'' \therefore \Delta = 0^\circ 45' 06''$.

g) Cuando la estrella cruza el meridiano local en una posición por debajo del polo celeste visible, se encuentra en una culminación más baja.

h) El telescopio mencionado en el enunciado es un telescopio Kepleriano, es decir, la imagen observada en el ocular estará invertida en relación a la observación a simple vista. Sin embargo, el movimiento de la estrella dentro del campo de visión del telescopio será en el sentido de las agujas del reloj, como lo indica la flecha amarilla en la figura 4.

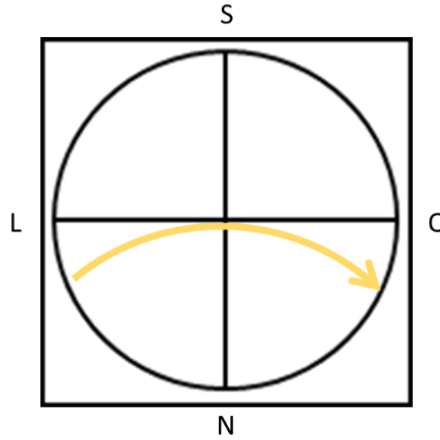


Figura 4

5) a) De la 3ra Ley de Kepler, tenemos que:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_P} \Rightarrow M_P = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{R^3}{T^2} = \frac{4 \cdot (3,14)^2 \cdot (2,00 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (100,60)^2}$$

$$\therefore M_P = 1,31 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

b) Considerando la órbita circular, tendremos que la velocidad de la nave se puede describir relacionando la fuerza de atracción gravitacional con la fuerza que mantiene a la nave en órbita (fuerza centrípeta). De esta forma tenemos:

$$\frac{GM_P m}{R^2} = \frac{mv_{orb}^2}{R} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_P}{R}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,31 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^6}} \quad \therefore v_{orb} \approx 2,09 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 2,09 \text{ km/s}$$

c) Para la órbita de escape, basta con que la nave espacial adquiriera suficiente velocidad para que su energía mecánica sea nula, es decir, tendremos que:

$$E_{TOT} = \frac{mv_{esc}^2}{2} - \frac{GM_P m}{R} \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_P}{R}} = \sqrt{2} \cdot v_{orb}$$

Por lo tanto, el cambio en la energía cinética necesaria que debe adquirir la nave será:

$$\Delta E_{cin} = \frac{mv_{esc}^2}{2} - \frac{mv_{orb}^2}{2} = \frac{m}{2} (2v_{orb}^2 - v_{orb}^2) \Rightarrow \Delta E_{cin} = \frac{9 \cdot 10^3}{2} \cdot (2,09 \cdot 10^3)^2 \quad \therefore \Delta E_{cin} \approx 1,97 \cdot 10^{10} \text{ J}$$