

II Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica

5 al 10 de septiembre de 2010 – Bogotá - Colombia



Prueba Teórica Individual - Soluciones

PROBLEMA 1

PREGUNTA 1: ASTRONOMISTA BOGOTÁN.

Por la ecuación fundamental de la astronomía de posición, tenemos:

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow \alpha = TSL - H$$

Donde TSL es el tiempo sideral local (o el tiempo) y H y α son, respectivamente, el ángulo horario y la ascensión recta de la estrella.

que se da la hora sideral de *Greenwich*, podemos calcular la hora sideral local mediante:

$$TSL = TSG + \lambda$$

Luego:

$$\alpha = TSL - \lambda - H$$

Convirtiendo H e λ a horas y minutos, $H = 3h\ 02min$ y $\lambda = -4h\ 56min\ 20s$ (negativo por longitud oeste). Así:

$$\alpha = 12h30min - 4h56min20s - 3h02min = 4h31min40s$$

$$\alpha = 4h31min40s$$

PREGUNTA 2: MEDICIÓN DE LA MASA DE LA VÍA LÁCTEA.

En su formulación general, la 3ª Ley que nos da Kepler:

$$n^2 a^3 = \mu \Rightarrow \frac{4\pi^2}{P^2} a^3 = G(M + m) \Rightarrow \frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M + m)}{4\pi^2}$$

donde $n = \frac{2\pi}{P}$ es el movimiento promedio de un cuerpo de masa m que orbita alrededor de otra masa M con un período P en una órbita elíptica o circular de semieje mayor a . G es la constante gravitacional.

Suponiendo que toda la masa, M_{VL} , de la Vía Láctea se concentra en su centro y que la órbita del Sol, cuya masa, M_{Sol} , es despreciable porque es pequeña ($M_{Sol} \ll M_{VL}$), es circular alrededor de M_{VL} , podemos escribir:

$$M_{VL} = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}$$

Dado que G la masa del Sol viene dada en la Tabla de Constantes, bastaría convertir todos los valores al Sistema Internacional y dividir la masa obtenida para la galaxia por la masa del Sol. En este caso:

$$M_{VL} = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_{Sol}P^2}$$

$$M_{VL} = \frac{4\pi^2 (25\,000 \cdot 9,46 \cdot 10^{15})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot (2,5 \cdot 10^8 \cdot 3,15 \cdot 10^7)^2} = 6,3 \cdot 10^{10} \text{ masas solares}$$

En Astronomía, el producto GM_{Sol} se llama Constante Gravitacional Heliocéntrica y es igual a:

$$GM_{Sol} = 4\pi^2 \text{ ua}^3 \cdot \text{año}^{-2} \cdot M_{Sol}^{-1}$$

La forma más segura de convertir años luz a unidades astronómicas es usando parsec.

$$1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ au} = 3,26 \text{ años luz} \Rightarrow 1 \text{ año luz} = 63\,271 \text{ au}$$

Luego:

$$M_{VL} = \frac{(25\,000 \cdot 63\,271)^3}{(250\,000\,000)^2} = 6,3 \cdot 10^{10} \text{ masas solares}$$

PREGUNTA 3: MIRANDO LA LUNA.

El poder de resolución, o simplemente resolución, de un telescopio es la distancia angular más pequeña entre dos fuentes puntuales para las que permanecen separadas y definidas. La expresión de resolución, dada por el patrón de difracción de una onda de longitud λ que pasa a través de una apertura de diámetro D , viene dada por la fórmula de Airy:

$$\text{sen } \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Así, la resolución (teórica) de un telescopio óptico con un objetivo de 5 metros de diámetro será:

$$\text{sen } \theta = 1,22 \frac{5\,500 \cdot 10^{-10}}{5} = 1,342 \cdot 10^{-7} \Rightarrow \theta = 7,7 \cdot 10^{-6} \text{ grados} = 0,03''$$

Por otra parte, un objeto de 4 m visto a una distancia media de 384 000 km tiene un tamaño angular de:

$$\alpha = \frac{4}{3,84 \times 10^8} = 1,04 \cdot 10^{-8} \text{ rad} = 0,002''$$

Por tanto, **NO sería posible distinguir los dos extremos de la nave espacial**, ya que su tamaño angular es casi 13 veces menor de lo que sería posible observar con el telescopio utilizado.

Aplicando la fórmula de Airy para las dimensiones de la nave espacial, vemos que un telescopio de:

$$D \cong 1,22 \frac{\lambda}{\theta} = 1,22 \cdot \frac{5\,500 \cdot 10^{-10}}{1,04 \cdot 10^{-8}} = 64,5 \text{ m}$$

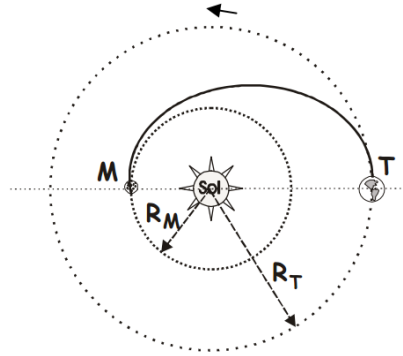
Por lo tanto, se necesitaría un telescopio con un objetivo de un diámetro casi 13 veces mayor que el diámetro del espejo disponible. Tenga en cuenta que en esta segunda discusión usamos la aproximación de arco pequeño a la fórmula de Airy:

$$\text{sen} \theta \approx \theta \text{ rad}, \quad \theta \ll 1$$

PROBLEMA 2: ASTRONÁUTICA – VIAJE A MERCURIO.

a) La figura provista con la declaración y reproducida al lado sugiere que es una trayectoria de energía mínima (esto no se describe en la declaración). Por lo tanto, debemos encontrar una órbita de transferencia de Hohmann², una elipse con el apogeo tangente a la órbita de la Tierra y el perigeo tangente a la órbita de Mercurio.

Si el lector está familiarizado con las ecuaciones del movimiento elíptico³, podría tomar, para la órbita de transferencia, la ecuación de velocidad en la forma:



$$V^2 = GM_o \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (1)$$

donde a es el semieje mayor de la órbita de transferencia y r el vector del radio de posición. Naturalmente, estamos despreciando los efectos gravitatorios de las masas de los planetas Tierra y Mercurio. Nota:

$$a = \frac{R_T + R_M}{2}$$

Para la velocidad en el apogeo de la órbita de transferencia, tenemos que la distancia desde el apogeo será:

$$r_{apo} = R_T$$

²Hohmann, Walter. *The Attainability of Heavenly Bodies*, Washington: Traducción técnica de la NASA F-44, 1960.

³Si el lector no está familiarizado con las ecuaciones del movimiento elíptico, vea el desarrollo de la velocidad en la órbita de transferencia al final de esta resolución.

Luego:

$$V_{apo} = \sqrt{GM_o \left(\frac{2}{R_T} - \frac{2}{R_T + R_M} \right)} = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}} \quad (2)$$

Sin embargo, la nave espacial, al partir de la Tierra, ya tiene una velocidad inicial que es la velocidad orbital de la Tierra:

$$V_T = \sqrt{\frac{GM_o}{R_T}}$$

De esta forma, la diferencia de velocidad que iniciará la maniobra de transferencia estará dada por:

$$\Delta V_T = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}} - \sqrt{\frac{GM_o}{R_T}}$$

Tenga en cuenta que $\Delta V_T < 0$, debido al término $R_M/(R_T + R_M)$. Esto significa que la nave espacial tendrá que disminuir su velocidad inicial para viajar a través de la órbita de transferencia elíptica.

b) El tiempo, t , que tarda la nave espacial en abandonar la Tierra y llegar a Mercurio es igual a la mitad del período, P , de la órbita de transferencia y puede calcularse a partir de la 3.ª ley de Kepler :

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{P^2} &= \frac{GM_o}{4\pi^2} \Rightarrow t = \frac{P}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_o}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \pi \sqrt{\frac{(R_T + R_M)^3}{8GM_o}} \end{aligned}$$

c) Como el lanzamiento debe ser tangente a la órbita circular de la Tierra y en dirección opuesta al movimiento: $\Delta V_T < 0$ la mejor indicación es que **el lanzamiento se realice verticalmente sobre el ecuador a las 6 pm.**

Aunque el problema pide expresar los resultados en términos de los radios orbitales, la masa del Sol y la constante gravitatoria, es fácil obtener resultados numéricos.

Teniendo en cuenta que $R_T = 1$ au y $P_T = 1$ año, por la 3ª Ley de Kepler tenemos que:

$$\frac{R_T^3}{P_T^2} = \frac{GM_o}{4\pi^2} = 1 \Rightarrow GM_o = 4\pi^2 \text{ ua}^3 \text{ año}^{-2} M_o^{-1}$$

Que es la Constante Gravitatoria Heliocéntrica, como se mostró anteriormente (ver PREGUNTA 2).

Así, sustituyendo el valor de esta constante en las ecuaciones obtenidas, sabiendo que $R_M = 0,38$ ua (dato no proporcionado en el enunciado, pero lo ponemos en la Tabla de Constantes), obtenemos:

$$\text{El } \Delta V_T = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}} - \sqrt{\frac{GM_o}{R_T}} = 2\pi \left(\sqrt{\frac{2,0,38}{1,38}} - 1 \right) = -1,62 \text{ ua/año}$$

Usando $1 \text{ au} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ y $1 \text{ año} = (365,25) (24) (3600) = 31557 \text{ 600 s}$, finalmente obtenemos:

$$\Delta V_T = -7\,698 \text{ m/s} = -7,7 \text{ km/s}$$

$$B)t = \pi \sqrt{\frac{(R_T + R_M)^3}{8GM_o}} = \sqrt{\frac{(R_T + R_M)^3}{32}} = \sqrt{\frac{1,38^3}{32}} = 0,287 \text{ años} = 104,7 \text{ días}$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA PARA LA VELOCIDAD ORBITAL

Dado que la órbita de transferencia de Hohmann, una vez alcanzada, ya no se verá afectada por fuerzas externas, podemos aplicar la conservación de la energía mecánica y el momento angular a sus puntos extremos (apogeo y perigeo). Entonces, por conservación de la energía mecánica:

$$\frac{mV_{apo}^2}{2} - \frac{GM_o m}{R_T} = \frac{mV_{per}^2}{2} - \frac{GM_o m}{R_M} \quad (3)$$

Y de la conservación del momento angular:

$$mR_T V_{apo} = mR_M V_{per} \quad (4)$$

Donde m es la masa del barco.

Sustituyendo la V_{per} ecuación (4) en (3), términos:

$$V_{apo} = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}}$$

Que es el mismo resultado obtenido en la ecuación (2).

PROBLEMA 3: LA TIERRA COMO UN CUERPO NEGRO

La Tierra recibe una potencia, P_T , igual a:

$$P_T = \frac{P_S}{4\pi^2 R_{T-S}^2} \cdot \pi R_T^2 = \frac{P_S}{4} \left(\frac{R_T}{R_{T-S}} \right)^2 \quad (5)$$

Como se supone que la Tierra, como cuerpo negro, está en equilibrio térmico, su potencia radiada será:

$$P_T = \sigma(4\pi R_T^2) T_T^4 \quad (6)$$

Igualando (6) y (5) y realizando tenemos:

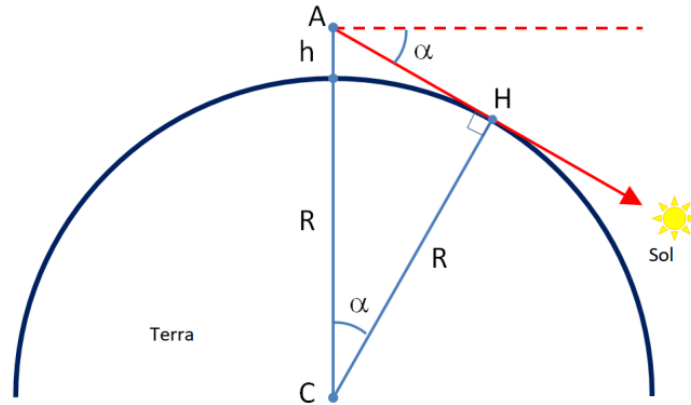
$$T_T^4 = T_S^4 \left(\frac{R_S}{2R_{T-S}} \right)^2 \Rightarrow T_T = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2R_{T-S}}}$$

Sustituyendo los valores numéricos dados en el enunciado, finalmente tenemos:

$$T_T = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2R_{T-S}}} = 6.000 \sqrt{\frac{6,69 \cdot 10^8}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}} \Rightarrow T_T = 289 \text{ K}$$

PROBLEMA 4: EN BUSCA DEL SOL

Sobre el ecuador el movimiento diurno es perpendicular al horizonte. Esto significa que solo cambiará la altura del Sol, manteniendo constante el azimut. Además, si el caminante sube la ladera norte de una montaña, solo cambiará su altitud y su distancia al horizonte permanecerá constante. De esta forma, la geometría del problema se puede resumir en la siguiente figura.



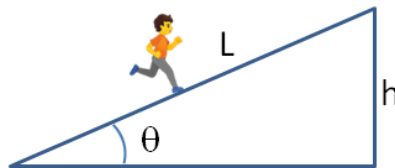
En la figura, A es la posición del observador a una altura h , que observa el Sol bajo un ángulo de altura α que es tangencial al horizonte en H . De la geometría de la figura tenemos:

$$R = (R + h) \cos \alpha \Rightarrow h = R \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

como $\alpha \ll 1 \Rightarrow \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$ entonces:

$$h \approx \frac{R\alpha^2}{2}$$

Por otro lado, para que el caminante alcance la altura h necesita recorrer una pendiente de longitud L que se muestra en la siguiente figura:



Luego:

$$L = \frac{h}{\sin \theta} = \frac{R\alpha^2}{2\sin \theta} \quad (7)$$

A medida que el Sol se oculta, debido a la rotación de la Tierra, el ángulo α debe aumentar con el ascenso del excursionista por la ladera de la montaña. Así:

$$\alpha = \omega(t - t_0) \quad (8)$$

Donde ω es la velocidad angular de la Tierra y t_o es el momento en que el caminante inicia el ascenso.

Así, sustituyendo la ecuación (8) en (7) tenemos:

$$L = \frac{R\omega^2(t-t_o)^2}{2\sin\theta} \quad (9)$$

La expresión (9) es la ecuación de un movimiento acelerado de $L_0 = 0$ en t_0 a L en t con aceleración igual a:

$$a = \frac{R\omega^2}{\sin\theta}$$

La velocidad a la que el caminante deberá subir la ladera de la montaña con aceleración a para mantener el Sol siempre en el horizonte será:

$$v = at = \frac{R\omega^2}{\sin\theta} t$$

O sea:

$$t = \frac{v\sin\theta}{R\omega^2}$$

Sustituyendo los valores numéricos por R , ω y θ , obtenemos:

$$t = \frac{v\sin\theta}{R\omega^2} = \frac{0,1736}{6,37 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\right)^2} v = 5,16v \text{ s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 5,16 v \text{ segundos}}$$

Como no se proporcionaron otros datos en la declaración, la respuesta tuvo que darse en términos de v .

Por otra parte, podemos considerar que la velocidad media de la marcha de un adulto sano ronda los 5 a 6 km/h, es decir, entre 1,4 y 1,7 m/s. Un atleta puede correr a unos 10 m/s. Adoptando un valor medio de $v = 5$ m/s, se obtiene:

$$\boxed{t = (5,16)(5) = 25,8 \text{ s}}$$