

XI Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica
21 a 25 de outubro de 2019 – Puebla – México



Prova Teórica Individual - Resoluções

1) a) A resolução angular do telescópio JWST (θ_J) é dada por:

$$\theta_J = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D_J} = 1,22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}}{6,5} \Rightarrow \theta_J = 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

b) Considerando a resolução angular pequena, temos que $\text{tg}\theta \approx \theta$. Se as estrelas analisadas estão à distância $r = 3 \cdot 10^6 \text{ al}$,

i) O valor de S para o telescópio JWST (S_J), vale:

$$\text{tg}\theta = \frac{S}{r} \Rightarrow S = \theta \cdot r$$

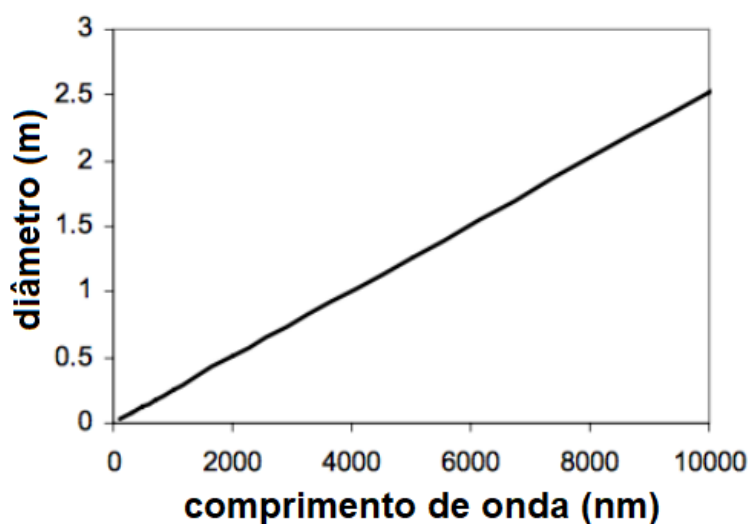
$$S_J = \theta_J \cdot r = 1,03 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^6 \Rightarrow S_J = 0,309 \text{ al}$$

ii) Para o telescópio Hubble, temos:

$$\theta_H = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D_H} = 1,22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}}{2,4} \Rightarrow \theta_H = 2,79 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

$$S_H = \theta_H \cdot r = 2,79 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^6 \Rightarrow S_H = 0,839 \text{ al}$$

c) A partir dos dados apresentados e da equação da resolução angular, temos:



d) Considerando que o corpo humano subtende um ângulo $\theta = 1''$ e emite energia infravermelha de $10\text{ }\mu\text{m}$, para se distinguir deve-se ter um telescópio com espelho primário com diâmetro mínimo de $D = 2,52\text{ m}$. Como o telescópio Hubble possui $D_H < D$, ele **não** pode distinguir um humano por emissão de calor.

2) a) Considerando o sistema conservativo, para o ponto N, temos:

$$E_T = K + U \Rightarrow -\frac{Gmm}{2a} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow -\frac{Gmm}{2a} = \frac{m}{2} \cdot \frac{GM}{R_T} - \frac{GMm}{R_T} \Rightarrow a = R_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 6371 \text{ km}$$

b) Sendo o ponto D o centro da elipse de focos F_1 e F_2 , e também o centro do quadrado NF_1CF_2 de lado R_T , vem:

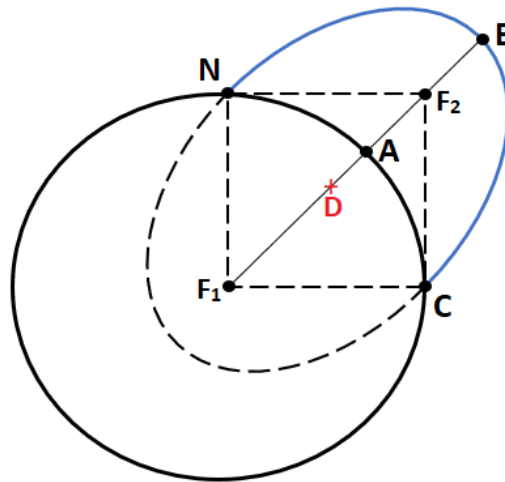
Note:

$$F_1F_2 = R_T \cdot \sqrt{2}$$

$$F_1A = R_T$$

$$DF_2 = \frac{R_T \sqrt{2}}{2}$$

$$DB = a = R_T$$



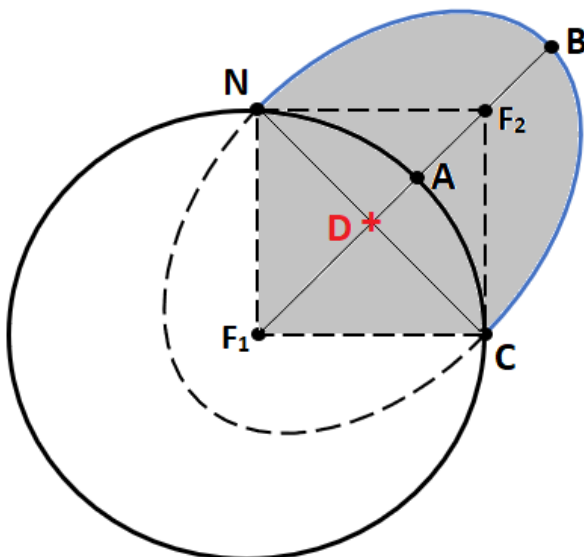
Da geometria do sistema, a distância AD é dada por:

$$F_1A - AD + DF_2 = F_1F_2 \Rightarrow R_T - AD + \frac{R_T \sqrt{2}}{2} = R_T \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} R_T$$

Logo, a distância AB, que equivale a altura máxima h , será dada por:

$$AD + AB = DB \Rightarrow \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} R_T + h = R_T \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} R_T = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6371 \Rightarrow h = 4505 \text{ km}$$

c) Lembrando que a área da elipse é dada por $S = \pi \cdot a \cdot b$, onde b é o semieixo menor; a área A da figura sombreada é:



$$A = \frac{\pi a b}{2} + \frac{R_T^2}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi \cdot R_T}{2} \cdot \frac{R_T \sqrt{2}}{2} + \frac{R_T^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{(\pi \sqrt{2} + 2)}{4} \cdot R_T^2$$

Aplicando a 3ª Lei de Kepler e considerando a gravidade g constante durante o voo, temos que o período orbital P da órbita é:

$$\left| \begin{aligned} \frac{P^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{GM_T} \\ g &= \frac{GM_T}{R_T^2} \end{aligned} \Rightarrow \frac{P^2}{R_T^3} = \frac{4\pi^2}{g \cdot R_T^2} \Rightarrow P = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} \right.$$

Portanto, da 2ª Lei de Kepler, temos que o tempo de voo será:

$$\begin{aligned} \frac{A_{Total}}{P} &= \frac{A}{t} \Rightarrow \frac{\pi ab}{P} = \frac{A}{t} \Rightarrow t = \frac{AP}{\pi ab} \Rightarrow t = \frac{(\pi\sqrt{2}+2)}{4} \cdot R_T^2 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} \cdot \frac{2}{\pi \cdot R_T \cdot R_T \sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{R_T}{g}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{\pi\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{637110^3}{9,8}} \Rightarrow \boxed{t = 3672 \text{ s} \approx 1,02 \text{ h}} \end{aligned}$$

3) a) O fluxo luminoso da estrela Ciro (F_C) a uma distância a_1 , vale:

$$F_C = \frac{L_C}{4\pi \cdot a_1^2} = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot a_1^2} \Rightarrow F_C = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_1^2}$$

Portanto, a potência recebida (P_R) pelo planeta Umi de raio r é:

$$F_C = \frac{P_R}{\pi \cdot r^2} \Rightarrow \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_1^2} = \frac{P_R}{\pi \cdot r^2} \Rightarrow P_R = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot r^2}{a_1^2}$$

Considerando o planeta Umi como um corpo negro ideal ($\varepsilon = 1$) em equilíbrio térmico, temos que a potência recebida é igual a potência emitida (P_E), logo:

$$\left| \begin{aligned} P_E &= \varepsilon 4\pi r^2 \sigma T_U^4 \\ P_R &= \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot r^2}{a_1^2} \Rightarrow \varepsilon 4\pi r^2 \sigma T_U^4 = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot r^2}{a_1^2} \Rightarrow \end{aligned} \right. \boxed{T_U = T \cdot \sqrt{\frac{R}{2a_1}}}$$

b) Comparando os dados de um astrônomo em Umi observando a estrela Ciro, com os dados de um astrônomo na Terra observando o Sol, da equação geral das magnitudes, vem:

$$m_1 - m_s = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{F_C}{F_s}\right) \Rightarrow m_1 - m_s = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot a_1^2} \cdot \frac{4\pi \cdot a_s^2}{4\pi R_s^2 \cdot \sigma \cdot T_s^4}\right) \Rightarrow m_1 - m_s = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{R^2 a_s^2 T^4}{R_s^2 a_1^2 T_s^4}\right)$$

A partir da equação encontrada no item a, podemos reescrever a equação acima:

$$\left| \begin{aligned} T^4 &= \frac{4 \cdot T_U^4 \cdot a_1^2}{R^2} \\ m_1 - m_s &= -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{R^2 a_s^2 T^4}{R_s^2 a_1^2 T_s^4}\right) \Rightarrow m_1 - m_s = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{4 \cdot a_s^2 T_U^4}{R_s^2 T_s^4}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-27) - (26,72) = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{4 \cdot (1,49 \cdot 10^{11})^2 \cdot T_U^4}{(6,95 \cdot 10^8)^2 \cdot (5778)^4}\right) \Rightarrow \boxed{T_U = 354,6 \text{ K}} \end{aligned} \right.$$

c) A potência emitida por Eki (P'_E) é dada por:

$$\left| \begin{array}{l} F_C = \frac{L_C}{4\pi \cdot a_2^2} = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_2^2} \\ F_C = \frac{P'_R}{\pi_2^2} \Rightarrow \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_2^2} = \frac{P'_E}{\pi_2^2} \Rightarrow P'_E = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi_2^2}{a_2^2} \\ P'_E = P'_R \end{array} \right.$$

Considerando que o diâmetro angular de Eki é θ , quando visto a uma distância d para um observador em Umi, temos que o raio r_2 de Eki pode ser expresso por:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r_2}{d} \Rightarrow r_2 = d \cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Portanto, o fluxo luminoso que Umi recebe de Eki é:

$$\left| \begin{array}{l} F = \frac{P'_E}{4\pi d^2} \\ P'_E = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi_2^2}{a_2^2} \Rightarrow F = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi}{a_2^2 \cdot 4\pi d^2} \cdot \left(d \cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow F = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4a_2^2} \cdot tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ r_2 = d \cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right.$$

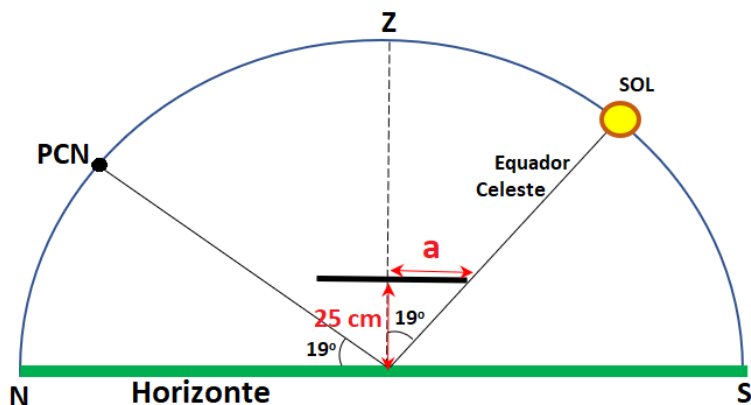
d) Comparando as magnitudes aparentes de Eki e Ciro, para um observador em Umi, da equação geral das magnitudes, temos:

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{F}{F_C}\right) \Rightarrow m_2 - m_1 = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{\frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4a_2^2} \cdot tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_1^2}}\right) \Rightarrow m_2 - m_1 = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{a_1^2}{4a_2^2} \cdot tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_2 - m_1 = -5 \cdot \log\left(\frac{a_1}{2a_2} \cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot 10^{\left(\frac{m_2 - m_1}{-5}\right)} \end{aligned}$$

e) Da 3ª Lei de Kepler, temos:

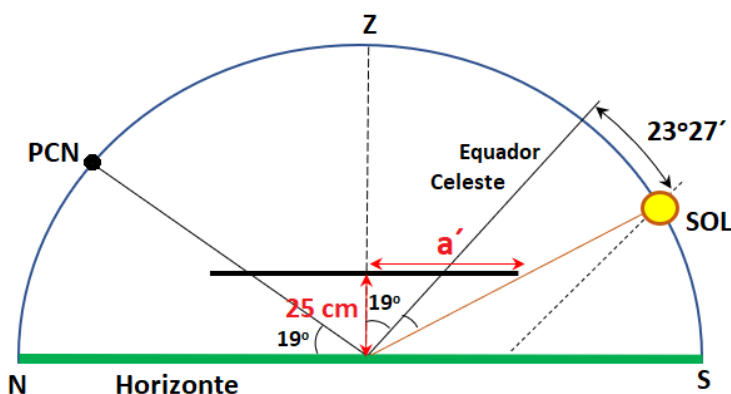
$$\begin{aligned} \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 &= \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot 10^{\left(\frac{m_2 - m_1}{-5}\right)}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{423}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{tg\left(\frac{20''}{2}\right)} \cdot 10^{\left(\frac{-2,6+27}{-5}\right)}\right)^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_2 = 918,6 \text{ dias terrestres} \end{aligned}$$

4) a) Esquematicamente, para o Sol ao meio-dia em 21 de março (equinócio) na cidade de Puebla ($\phi = 19^\circ\text{N}$), temos:



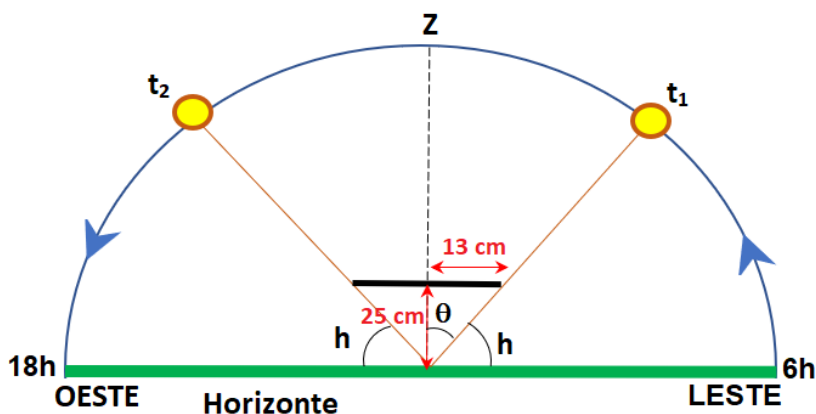
$$\operatorname{tg} 19^\circ = \frac{a}{25} \Rightarrow a = 8,61 \text{ cm}$$

b) A situação mais crítica acontecerá quando o Sol possuir a menor altura, ao meio-dia, em relação ao horizonte. Esse evento acontecerá próximo ao dia 21 de dezembro (solstício de inverno para o hemisfério Norte) em que a declinação do Sol é $-23^\circ 27'$, esquematicamente, temos:



$$\operatorname{tg}(19^\circ + 23^\circ 27') = \frac{a'}{25} \Rightarrow a' = 22,87 \text{ cm}$$

c) Como Citlali está no Equador ($\phi = 0^\circ$) em 21 de setembro (equinócio), temos que a altura h do Sol em que seu chapéu cumpre o propósito de proteger todo o seu rosto é:



$$\begin{aligned} h + \theta &= 90^\circ \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{13}{25} \Rightarrow h = 90^\circ - 27,47^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow h = 62,52^\circ \end{aligned}$$

Sabendo que no Equador, em 21 de setembro, o Sol nasce próximo às 6h e se põe às 18h, os instantes t_1 e t_2 em que o Sol terá altura h são respectivamente:

$$t_1 = 6h + 62,52^\circ \cdot \frac{12h}{180^\circ} \Rightarrow t_1 = 10h10\text{min}4,8s$$

$$t_2 = 18h - 62,52^\circ \cdot \frac{12h}{180^\circ} \Rightarrow t_2 = 13h49\text{min}55,2s$$

Portanto, o chapéu cumprirá o seu papel das **10h 10min às 13h 50min**.

d) O intervalo de tempo necessário para que Citlali sofra queimaduras será o tempo t em que a área do gráfico corresponda ao valor 200 J/m^2 (lembrando que o chapéu absorve metade da radiação). Analisando o gráfico, temos:

- A área total do gráfico é:

$$A_{\text{total}} = \frac{(6+2) \cdot 0,016}{2} \cdot 3600 = 230,4 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- A área correspondente entre 12h e 14h é:

$$A_1 = 2 \cdot 0,016 \cdot 3600 = 115,2 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- A área correspondente entre os instantes 14h e t :

$$A_2 = 200 - 115,2 = 84,8 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- A área correspondente entre os instantes t e 18h:

$$A_3 = A_{\text{total}} - (A_1 + A_2) = 230,4 - (115,2 + 84,8) = 30,4 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- Da proporção do gráfico, temos que a relação entre t e y é tal que:

$$\frac{18-t}{18-14} = \frac{y-0}{0,016-0} \Rightarrow y = 0,004(18-t) \quad [1]$$

- Entre os instantes t e 18h, é válido que:

$$A_3 = \frac{(18-t) \cdot y}{2} \Rightarrow 30,4 = \frac{(18-t) \cdot y}{2} \cdot 3600 \quad [2]$$

- Das equações [1] e [2], vem:

$$\left| \begin{array}{l} y = 0,004(18-t) \\ 30,4 = \frac{(18-t) \cdot y}{2} \cdot 3600 \end{array} \right. \Rightarrow 30,4 = \frac{y}{0,004} \cdot \frac{y}{2} \cdot 3600 \Rightarrow y = 0,00822 \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \quad \text{e} \quad t = 15,94 \text{h}$$

Portanto, **a partir das 16h** Citlali sofrerá queimaduras por excesso de exposição solar.

