

X Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica

14 a 20 de outubro de 2018 – Ayolas – Paraguai

Prova Teórica Individual – Resoluções

1) De acordo com o enunciado, temos as seguintes informações:

$$V_1 = V_2, r_1 = \frac{d}{4}, r_2 - r_1 = 519,84 \text{ km}, \rho_1 = 9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \rho_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{ e } \rho_3 = 3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

a) Para obter a aceleração na superfície do planeta, devemos obter a massa total deste corpo, assim como as espessuras das cascas que envolvem o núcleo (figura 1). Portanto, temos o seguinte sistema de equações, considerando as massas de cada camada e suas respectivas densidades.

$$\begin{cases} M_1 = \rho_1 \cdot V_1 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r_1^3 \\ M_2 = \rho_2 \cdot V_2 = \rho_2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi (r_2^3 - r_1^3) \\ M_3 = \rho_3 \cdot V_3 = \rho_3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi (r_3^3 - r_2^3) \end{cases}$$

Da comparação entre V_1 e V_2 , temos que:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi (r_2^3 - r_1^3) = \frac{4}{3} \cdot \pi r_1^3 \Rightarrow r_2^3 = 2r_1^3 \therefore r_2 = \sqrt[3]{2} r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 - r_1 = 519,84 \Rightarrow 1,26r_1 - r_1 = 519,84 \therefore r_1 = 1\,999,38 \text{ km} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = 1,26 r_1 \therefore r_2 = 2\,519,22 \text{ km}$$

Da relação entre o diâmetro e o raio do núcleo do planeta, temos que:

$$r_1 = \frac{d}{4} = \frac{2r_3}{4} \Rightarrow r_3 = 2r_1 \therefore r_3 = 3\,998,76 \text{ km}$$

Aplicando os valores de r_1 , r_2 e r_3 nas massas, obtemos que:

$$\begin{cases} M_1 = 9,00 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2,00 \cdot 10^6)^3 \\ M_2 = 5,00 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot [(2,52 \cdot 10^6)^3 - (2,00 \cdot 10^6)^3] \\ M_3 = 3,00 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi [(4,00 \cdot 10^6)^3 - (2,52 \cdot 10^6)^3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1 \approx 3,02 \cdot 10^{23} \text{ kg} \\ M_2 \approx 1,67 \cdot 10^{23} \text{ kg} \\ M_3 \approx 6,03 \cdot 10^{23} \text{ kg} \end{cases}$$

$$\therefore M_{TOTAL} = M_1 + M_2 + M_3 = 1,07 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Portanto, na superfície do planeta, a aceleração g_s será de:

$$g_s = \frac{GM}{r_3^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,07 \cdot 10^{24}}{(4 \cdot 10^6)^2} \therefore g_s = 4,47 \text{ m/s}^2$$



Figura 1

b) Por simetria, no centro do planeta, toda a massa está distribuída ao redor deste ponto. Portanto, considerando que as camadas que constituem o planeta sejam homogêneas, podemos afirmar que $g_{centro} = 0$.

c) De maneira análoga ao item anterior, apenas o núcleo e a camada intermediária exercerão atração gravitacional sobre a separação entre a camada intermediária e a camada externa do planeta. Desta maneira, teremos o seguinte valor:

$$g_{int} = \frac{G(M_1 + M_2)}{r_2^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (3,02 \cdot 10^{23} + 1,67 \cdot 10^{23})}{(2,52 \cdot 10^6)^2} \quad \therefore g_{int} \approx 4,92 \text{ m/s}^2$$

2) a) No caso, o processo de deslocamento da linha de 5 985 Å ocorre a cada 7 dias. Portanto, podemos afirmar que o período de translação da estrela será de **7 dias**.

b) A partir do efeito Doppler, obtemos as velocidades de aproximação e afastamento da estrela em relação a nossa linha de visada.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \Rightarrow \begin{cases} v_{azul} = \frac{5\,975 - 5\,985}{5\,985} \cdot 3 \cdot 10^8 \\ v_{red} = \frac{6\,000 - 5\,985}{5\,985} \cdot 3 \cdot 10^8 \end{cases} \therefore \begin{cases} v_{azul} = -5,01 \cdot 10^5 \text{ m/s} \\ v_{red} = 7,52 \cdot 10^5 \text{ m/s} \end{cases}$$

Aplicando a 2ª Lei de Kepler, sabemos que a velocidade orbital da estrela será máxima no periélio e a mínima no afélio, o que nos permite concluir:

$$\begin{cases} v_a = 5,01 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_p = 7,52 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

c) A partir das velocidades do afélio e do periélio, é possível obter a excentricidade (e) da órbita estelar. Para isso, podemos deduzir a razão a partir da expressão da velocidade orbital.

$$\begin{aligned} v(r) &= \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \text{ onde } \begin{cases} r_p = a(1-e) \\ r_a = a(1+e) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} v(r_p) = v_p = \sqrt{GM \left[\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right]} \\ v(r_a) = v_a = \sqrt{GM \left[\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a} \right]} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \left[\frac{2 - (1-e)}{(1-e)} \right]} \\ v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \left[\frac{2 - (1+e)}{(1+e)} \right]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)} \\ v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v_p}{v_a} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1+e}{1-e} \right)}{\left(\frac{1-e}{1+e} \right)}} &\Rightarrow \frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow \frac{7,52 \cdot 10^5}{5,01 \cdot 10^5} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow 7,52 - 7,52e = 5,01 + 5,01e \quad \therefore e = 0,20 \end{aligned}$$

3) a) Para obter a magnitude absoluta de cada sistema binário, devemos calcular as magnitudes aparentes destes. No caso das estrelas com magnitudes $m_a = +1$ e $m_b = +2$, obtemos a relação entre os fluxos da Equação geral das magnitudes.

$$\begin{aligned} m_a - m_b &= -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_a}{F_b} \right) \Rightarrow 1 - 2 = -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_a}{F_b} \right) \Rightarrow F_a = F_b \cdot 10^{0,4} \therefore F_a = 2,512 F_b \Rightarrow \\ \Rightarrow m_{ab} - m_b &= -2,5 \cdot \log \left(\frac{F_a + F_b}{F_b} \right) \Rightarrow m_{ab} = 2 - 2,5 \cdot \log(3,512) \therefore m_{ab} \approx 0,64 \end{aligned}$$

Para a magnitude absoluta M_{ab} , utiliza-se a Equação de Pogson.

$$m_{ab} - M_{ab} = 5 \cdot \log(d_{pc}) - 5 \Rightarrow M_{ab} = 0,64 + 5 - 5 \cdot \log\left(\frac{20}{3,26}\right) \Rightarrow \boxed{M_{ab} \approx 1,92}$$

De forma análoga, para as estrelas com magnitudes $m_c = 3$ e $m_d = 4$, temos que:

$$m_c - m_d = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_c}{F_d}\right) \Rightarrow F_c = F_d \cdot 10^{0,4} \Rightarrow F_c = 2,512 F_d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{cd} - m_d = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_c + F_d}{F_d}\right) \Rightarrow m_{cd} = 4 - 2,5 \cdot \log(3,512) \Rightarrow m_{cd} = 2,64$$

$$\Rightarrow m_{cd} - M_{cd} = 5 \cdot \log(d_{pc}) - 5 \Rightarrow M_{cd} = 2,64 + 5 - 5 \cdot \log\left(\frac{60}{3,26}\right) \Rightarrow \boxed{M_{cd} \approx 1,31}$$

b) A magnitude aparente das quatro estrelas (m_{SIST}) pode ser determinada pela equação geral das magnitudes.

$$m_{ab} - m_{cd} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{ab}}{F_{cd}}\right) \Rightarrow 0,64 - 2,64 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{ab}}{F_{cd}}\right) \Rightarrow \frac{F_{ab}}{F_{cd}} = 10^{0,8} \Rightarrow F_{ab} = 6,31 F_{cd} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{SIST} - m_{cd} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{ab} + F_{cd}}{F_{cd}}\right) \Rightarrow m_{SIST} = 2,64 - 2,5 \cdot \log(7,31) \Rightarrow \boxed{m_{SIST} = 0,48}$$

4) A estrutura descrita pelo enunciado do problema é vista na figura 2.

a) Como o telescópio está orientado para o ponto cardinal Sul, ao atingir a culminação, a estrela também estará na direção Sul. Usando o critério do problema, temos que $A = 0$.

b) Ao culminar no campo de visão do telescópio, a estrela estará com altura equivalente ao ângulo entre o telescópio e o horizonte. Pela figura 2, concluímos que:

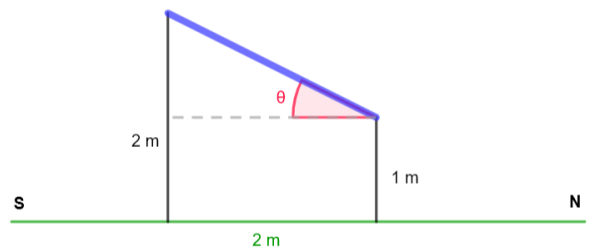


Figura 2

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = h_* = 26^\circ 33' 54''}$$

c) Ao comparar com a latitude do local ($\phi = 27^\circ 19' S$), percebe-se que a estrela está abaixo do Polo Celeste Sul. Portanto, ela se encontra na culminação inferior e, desta forma, $H = 12 h$.

d) Para determinar a ascensão reta da estrela, podemos compará-la com o Tempo Sideral Local (TSL).

$$TSL = H + \alpha$$

O TSL pode ser determinado através da longitude (λ) e do Tempo Sideral de Greenwich (TSG):

$$TSG + \lambda = TSL \Rightarrow TSL = 01 h 16 min + (56^\circ 21') = 01 h 16 min + 03 h 45 min 24 s \Rightarrow TSL = 05 h 01 min 24 s \Rightarrow 05 h 01 min 24 s = 12 h 00 min + \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 17 h 01 min 24 s}$$

e) A declinação da estrela pode ser determinada pela distância polar (Δ), como pode ser visto na figura 3. Lembrando que a distância polar é um ângulo suplementar à declinação (δ), temos que:

$$\Delta = 90^\circ - \delta = \phi - h \Rightarrow 90^\circ - \delta = 27^\circ 19' - 26^\circ 33' 54'' \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta = -89^\circ 14' 54''}$$

Lembrando que, pelo fato da estrela estar entre o Equador e o Polo Sul Celeste, a coordenada da estrela apresentará sinal negativo.

f) Da figura 3: $\Delta = 27^\circ 19' - 26^\circ 33' 54'' \Rightarrow \boxed{\Delta = 0^\circ 45' 06''}$.

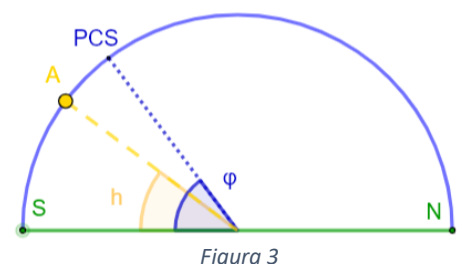


Figura 3