

II Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica

5 a 10 de setembro de 2010 – Bogotá - Colômbia



Prova Teórica Individual – Resoluções

PROBLEMA 1

QUESTÃO 1: ASTRÔNOMO BOGOTANO.

Pela equação fundamental da Astronomia de posição, temos:

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow \alpha = TSL - H$$

Onde TSL é o tempo (ou hora) sideral local e H e α são, respectivamente, o ângulo horário e a ascensão reta da estrela (do astro).

Como é dado o tempo sideral em *Greenwich*, podemos calcular tempo sideral local por:

$$TSL = TSG + \lambda$$

Logo:

$$\alpha = TSL - \lambda - H$$

Convertendo H e λ em hora e minutos, $H = 3\text{h } 02\text{min}$ e $\lambda = -4\text{h } 56\text{min } 20\text{s}$ (negativo por ser longitude Oeste). Assim:

$$\alpha = 12\text{h } 30\text{min} - 4\text{h } 56\text{min } 20\text{s} - 3\text{h } 02\text{min} = 4\text{h } 31\text{min } 40\text{s}$$

$$\alpha = 4\text{h } 31\text{min } 40\text{s}$$

QUESTÃO 2: MEDINDO A MASSA DA VIA LÁCTEA.

Em sua formulação geral, a 3ª Lei que Kepler nos fornece:

$$n^2 a^3 = \mu \Rightarrow \frac{4\pi^2}{P^2} a^3 = G(M + m) \Rightarrow \frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M + m)}{4\pi^2}$$

Onde $n = \frac{2\pi}{P}$ é o movimento médio de um corpo de massa m orbitando outro de massa M com um período P em uma órbita elíptica, ou circular, de semieixo maior a . G é a constante gravitacional.

Assumindo que toda a massa, M_{VL} , da Via Láctea esteja concentrada em seu centro e que a órbita do Sol, cuja massa, M_{Sol} , é desprezível por pequena ($M_{Sol} \ll M_{VL}$), seja circular ao redor de M_{VL} , podemos escrever:

$$M_{VL} = \frac{4\pi^2 a^3}{G P^2}$$

Como G e a massa do Sol são dados na Tabela de Constantes bastaria converter todos os valores para o Sistema Internacional e dividir a massa obtida para a galáxia pela massa do Sol. Neste caso:

$$M_{VL} = \frac{4\pi^2 a^3}{G m_{Sol} P^2}$$

$$M_{VL} = \frac{4\pi^2 (25\,000 \cdot 9,46 \cdot 10^{15})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot (2,5 \cdot 10^8 \cdot 3,15 \cdot 10^7)^2} = 6,3 \cdot 10^{10} \text{ massas solares}$$

Em Astronomia, o produto GM_{Sol} é chamado de Constante Gravitacional Heliocêntrica e vale:

$$GM_{Sol} = 4\pi^2 \, ua^3 \cdot ano^{-2} \cdot M_{Sol}^{-1}$$

A maneira mais segura de se converter o ano-luz para unidades astronômicas é usando o parsec.

$$1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ ua} = 3,26 \text{ anos-luz} \Rightarrow 1 \text{ ano-luz} = 63\,271 \text{ ua}$$

Logo:

$$M_{VL} = \frac{(25\,000 \cdot 63 \cdot 271)^3}{(250\,000\,000)^2} = 6,3 \cdot 10^{10} \text{ massas solares}$$

QUESTÃO 3: OLHANDO A LUA.

O poder resolutor, ou simplesmente resolução, de um telescópio é a menor distância angular entre duas fontes pontuais para a qual elas continuam separadas e definidas. A expressão da resolução, dada pelo padrão de difração de uma onda de comprimento λ passando por uma abertura de diâmetro D , é dada pela fórmula de Airy:

$$\text{sen}\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Assim, a resolução (teórica) de um telescópio óptico com uma objetiva de 5 metros de diâmetro será:

$$\text{sen}\theta = 1,22 \frac{5\,500 \cdot 10^{-10}}{5} = 1,342 \cdot 10^{-7} \Rightarrow \theta = 7,7 \cdot 10^{-6} \text{ graus} = 0,03''$$

Por outro lado, um objeto de 4 m visto a uma distância média de 384 000 km possui um tamanho angular de:

$$\alpha = \frac{4}{3,84 \cdot 10^8} = 1,04 \cdot 10^{-8} \text{ rad} = 0,002''$$

Portanto, **NÃO seria possível distinguir os dois extremos da nave**, pois seu tamanho angular é quase 13 vezes menor do que o que seria possível observar com o telescópio empregado.

Aplicando-se a fórmula de Airy para as dimensões da nave, vemos que seria necessário um telescópio de:

$$D \cong 1,22 \frac{\lambda}{\theta} = 1,22 \cdot \frac{5\,500 \cdot 10^{-10}}{1,04 \cdot 10^{-8}} = 64,5 \text{ m}$$

Logo, seria necessário um telescópio com uma objetiva de diâmetro quase 13 vezes maior que o diâmetro do espelho disponível. Observe que nessa segunda discussão usamos a aproximação de pequenos arcos para a fórmula de Airy:

$$\text{sen}\theta \approx \theta \text{ rad}, \quad \theta \ll 1$$

PROBLEMA 2: ASTRONÁUTICA – VIAJANDO PARA MERCÚRIO.

a) A figura fornecida com o enunciado e reproduzida ao lado sugere que se trata de uma trajetória de mínima energia (isto não está descrito no enunciado). Assim sendo, devemos encontrar uma órbita de transferência de Hohmann², uma elipse com o apogeu tangente à órbita da Terra e o perigeu tangente à órbita de Mercúrio.

Caso o leitor esteja familiarizado com as equações do movimento elíptico³, poderia tomar, para a órbita de transferência, a equação da velocidade na forma:

$$V^2 = GM_o \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (1)$$

Onde a é o semieixo maior da órbita de transferência e r o raio-vetor de posição. Naturalmente estamos desprezando os efeitos gravitacionais das massas dos planetas Terra e Mercúrio. Note que:

$$a = \frac{R_T + R_M}{2}$$

Para a velocidade no apogeu da órbita de transferência, temos que a distância do apogeu será:

$$r_{apo} = R_T$$

Logo:

$$V_{apo} = \sqrt{GM_o \left(\frac{2}{R_T} - \frac{2}{R_T + R_M} \right)} = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}} \quad (2)$$

Contudo, a nave, ao partir da Terra, já possui uma velocidade inicial que é a velocidade orbital da Terra:

$$V_T = \sqrt{\frac{GM_o}{R_T}}$$

Desta forma, a diferença de velocidade que iniciará a manobra de transferência será dada por:

$$\Delta V_T = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}} - \sqrt{\frac{GM_o}{R_T}}$$

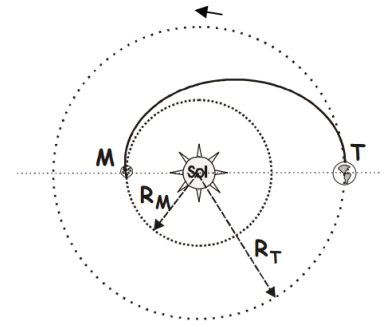
Note que $\Delta V_T < 0$, por conta do termo $R_M/(R_T + R_M)$. Isto quer dizer que a nave terá que diminuir sua velocidade inicial para percorrer a órbita elíptica de transferência.

b) O tempo, t , que a nave leva para sair da Terra e chegar a Mercúrio é igual à metade do período, P , da órbita de transferência e pode ser calculado a partir da 3ª Lei de Kepler:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM_o}{4\pi^2} \Rightarrow t = \frac{P}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_o}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \pi \sqrt{\frac{(R_T + R_M)^3}{8GM_o}}$$

c) Como o lançamento deve ser tangente à órbita circular da Terra e em sentido oposto ao movimento, $\Delta V_T < 0$, a melhor indicação é que **o lançamento se dê verticalmente sobre a linha do equador às 18h.**



² Hohmann, Walter. *The Attainability of Heavenly Bodies*, Washington: NASA Technical Translation F-44, 1960.

³ Caso o leitor não esteja familiarizado com as equações do movimento elíptico, veja o desenvolvimento para a velocidade na órbita de transferência ao final desta resolução.

APLICAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA 2

Embora o problema solicite exprimir os resultados em termos dos raios orbitais, da massa do Sol e da constante gravitacional, é fácil obter resultados numéricos.

Tendo em conta que $R_T = 1$ ua e $P_T = 1$ ano, pela 3ª Lei de Kepler têm-se que:

$$\frac{R_T^3}{P_T^2} = \frac{GM_o}{4\pi^2} = 1 \Rightarrow GM_o = 4\pi^2 \text{ ua}^3 \text{ ano}^{-2} M_o^{-1}$$

Que é a Constante Gravitacional Heliocêntrica, como já foi mostrado anteriormente (v. QUESTÃO 2).

Assim, substituindo o valor dessa constante nas equações obtidas, sabendo ainda que $R_M = 0,38$ ua (dado não fornecido no enunciado, mas colocamos na Tabela de Constantes), obtemos:

$$\text{a) } \Delta V_T = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}} - \sqrt{\frac{GM_o}{R_T}} = 2\pi \left(\sqrt{\frac{2,0,38}{1,38}} - 1 \right) = -1,62 \text{ ua/ano}$$

Usando $1 \text{ ua} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ e $1 \text{ ano} = 365,25 \cdot 24 \cdot 3600 = 31\,557\,600 \text{ s}$, obtemos, finalmente:

$$\Delta V_T = -7\,698 \text{ m/s} = -7,7 \text{ km/s}$$

$$\text{b) } t = \pi \sqrt{\frac{(R_T + R_M)^3}{8GM_o}} = \sqrt{\frac{(R_T + R_M)^3}{32}} = \sqrt{\frac{1,38^3}{32}} = 0,287 \text{ anos} = 104,7 \text{ dias}$$

SOLUÇÃO ALTERNATIVA PARA A VELOCIDADE ORBITAL

Dado que a órbita de transferência de Hohmann, uma vez atingida, não receberá mais efeito de forças externas, podemos aplicar a conservação de energia mecânica e momentum angular aos seus pontos extremos (apogeu e perigeu). Assim, pela conservação de energia mecânica:

$$\frac{mV_{apo}^2}{2} - \frac{GM_o m}{R_T} = \frac{mV_{per}^2}{2} - \frac{GM_o m}{R_M} \quad (3)$$

E da conservação do momentum angular:

$$mR_T V_{apo} = mR_M V_{per} \quad (4)$$

Onde m é a massa da nave.

Substituindo V_{per} da equação (4) em (3), temos:

$$V_{apo} = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}}$$

Que é o mesmo resultado obtido na equação (2).

PROBLEMA 3: A TERRA COMO UM CORPO NEGRO

A Terra recebe uma potência, P_T , igual a:

$$P_T = \frac{P_S}{4\pi^2 R_{T-S}^2} \cdot \pi R_T^2 = \frac{P_S}{4} \left(\frac{R_T}{R_{T-S}} \right)^2 \quad (5)$$

Como a Terra, como um corpo negro, está supostamente em equilíbrio térmico, sua potência irradiada será:

$$P_T = \sigma(4\pi R_T^2) T_T^4 \quad (6)$$

Igualando (6) e (5) e efetuando temos:

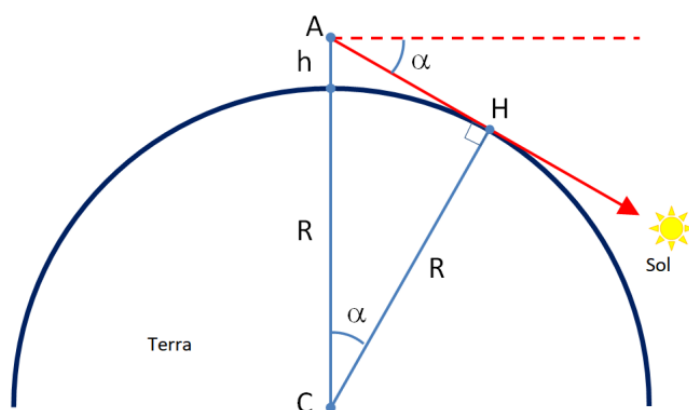
$$T_T^4 = T_S^4 \left(\frac{R_S}{2R_{T-S}} \right)^2 \Rightarrow T_T = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2R_{T-S}}}$$

Substituindo os valores numéricos dados no enunciado, temos, finalmente:

$$T_T = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2R_{T-S}}} = 6.000 \sqrt{\frac{6,69 \cdot 10^8}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}} \Rightarrow T_T = 289 \text{ K}$$

PROBLEMA 4: EM BUSCA DO SOL

Sobre a linha do Equador o movimento diurno é perpendicular ao horizonte. Isto quer dizer que somente a altura do Sol irá variar, mantendo o azimute constante. Também, se o andarilho sobe a encosta Norte de uma montanha, apenas sua altitude irá variar e sua distância ao horizonte permanecerá constante. Desta forma, a geometria do problema pode ser resumida na figura abaixo.



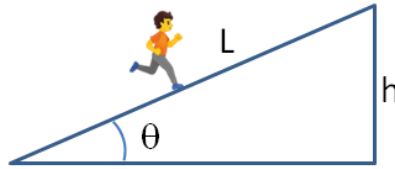
Na figura, A é a posição do observador a uma altitude h , que observa o Sol sob um ângulo de altura α que tangencia o horizonte em H . Da geometria da figura temos:

$$R = (R + h) \cos \alpha \Rightarrow h = R \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

Como $\alpha \ll 1 \Rightarrow \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$, então:

$$h \approx \frac{R\alpha^2}{2}$$

Por outro lado, para o andarilho atingir a altitude h ele precisa percorrer um aclave de comprimento L mostrado na figura a seguir:



Logo:

$$L = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{R\alpha^2}{2\sin\theta} \quad (7)$$

Na medida em que o Sol vai baixando, em decorrência da rotação da Terra, o ângulo α precisa aumentar com a ascensão do andarilho pela encosta da montanha. Assim:

$$\alpha = \omega(t - t_o) \quad (8)$$

Onde ω é a velocidade angular da Terra e t_o é o momento em que o andarilho inicia a ascensão.

Assim, substituindo a equação (8) em (7) temos:

$$L = \frac{R\omega^2(t-t_o)^2}{2\sin\theta} \quad (9)$$

A expressão (9) é a equação de um movimento acelerado de $L_0 = 0$ em t_0 até L em t com aceleração igual a:

$$a = \frac{R\omega^2}{\sin\theta}$$

A velocidade com que o andarilho deve subir a encosta da montanha com uma aceleração a para manter o Sol sempre no horizonte será:

$$v = at = \frac{R\omega^2}{\sin\theta} t$$

Ou seja:

$$t = \frac{v\sin\theta}{R\omega^2}$$

Substituindo os valores numéricos para R , ω e θ , obtemos:

$$t = \frac{v\sin\theta}{R\omega^2} = \frac{0,1736}{6,37 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\right)^2} v = 5,16v \text{ s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 5,16 v \text{ segundos}}$$

Como nenhum outro dado foi fornecido no enunciado, a resposta teve que ser dada em função de v .

Por outro lado, podemos considerar que a velocidade média de caminhada de um adulto saudável é cerca de 5 a 6 km/h, ou seja, entre 1,4 e 1,7 m/s. Já um atleta pode correr cerca de 10 m/s. Adotando um valor médio de $v = 5$ m/s, obtemos:

$$\boxed{t = 5,16 \cdot 5 = 25,8 \text{ s}}$$