

Prueba Teórica Grupal – Soluciones

1.

a.

Las componentes observadas estarán en función de V_0 , V , R_0 , R , l , α

$$V_{obs,r} = V \cos \alpha - V_0 \cos(90 - l) = V \cos \alpha - V_0 \sin l \quad \text{Ecuación 1}$$

$$V_{obs,t} = V \sin \alpha - V_0 \cos(90 - l) = V \sin \alpha - V_0 \cos l \quad \text{Ecuación 2}$$

b.

$$V = \Omega R \quad \text{ecuación 3}$$

$$V_0 = \Omega_0 R_0 \quad \text{ecuación 4}$$

De las ecuaciones 1,3,4 tenemos: $\Omega R \cos \alpha - \Omega_0 R_0 \sin l$ Ecuación 5

$$V_{obs,t} = \Omega R \sin \alpha - \Omega_0 R_0 \cos l \quad \text{ecuación 6}$$

c.

De la figura 1:

$$R \cos \alpha = R_0 \sin l \quad \text{Ecuación 7}$$

$$R_0 \cos l = d + R \sin \alpha$$

$$R \sin \alpha = R_0 \cos l - d \quad \text{Ecuación 8}$$

De 5 y 7 tenemos:

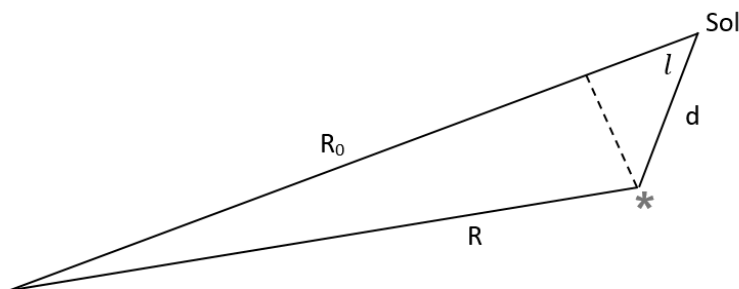
$$V_{obs,r} = (\Omega - \Omega_0) R_0 \sin l \quad \text{Ecuación 9}$$

De 6 y 8 tenemos:

$$V_{obs,t} = (\Omega - \Omega_0) R_0 \cos l - \Omega d \quad \text{Ecuación 10}$$

d.

i.



$$R \cos(\ll \text{angulo}) = R_0 - d \cos l \quad \text{Ecuación 11}$$

ii.

$$\Omega = \Omega_0 + k_0(R - R_0) \text{ Ecuación 12}$$

De 9 y 12 tenemos:

$$V_{obs,r} = k_0 R_0 (R - R_0) \sin l \text{ Ecuación 13}$$

De 10 y 12 tenemos:

$$V_{obs,t} = k_0 R_0 (R - R_0) \cos l - \Omega d \text{ Ecuación 14}$$

De 13 y 11 tenemos:

$$V_{obs,r} = k_0 R_0 d \cos l \sin l = -\frac{k_0 R_0}{2} d \sin 2l \text{ Ecuación 15}$$

De 14 y 11 tenemos:

$$V_{obs,t} = k_0 R_0 (R - R_0) \cos^2 l - \Omega d$$

$$V_{obs,t} = -\frac{k_0 R_0 d}{2} (1 + \cos 2l) - \Omega d \text{ Ecuación 16}$$

e.

i.

De 15 y 16 tenemos:

$$V_{obs,r} = A d \sin 2l \text{ Ecuación 17}$$

$$V_{obs,t} = A d \cos 2l + B d \text{ Ecuación 18}$$

ii.

$\frac{V_{obs,t}}{d}$ vs l debe verse como $\cos(\varphi - \pi)$ y desplazado verticalmente por $-B$.

Así, en $l=0$ debería tener un mínimo $A/d = -B$ y en $\pi/2$ un máximo de $A-B$

iii.

$V_{obs,t}/d$ da la velocidad angular en el plano del cielo. A está dada por la amplitud, B está dada por el desplazamiento hacia abajo en el eje y

f)

i.

El gráfico muestra las dos componentes de la velocidad angular aparente de las estrellas en el plano del cielo. Por esta razón es necesario registrar las posiciones de las estrellas en diferentes momentos. GAIA tiene una resolución espacial muy alta y, por tanto, es ideal para este tipo de observaciones (astrométricas).

ii.

El análisis pretende describir el movimiento del disco galáctico. Para ello, los mejores trazos serán las estrellas del disco galáctico. Las estrellas de los tipos espectrales O, B, A son jóvenes y, por tanto, no han tenido tiempo de abandonar el disco galáctico.

iii.

$$V_{obs,t}^2 = V_t^2 = V_{t,l}^2 + V_{t,b}^2$$

$$V_{obs,t} = \sqrt{0,5^2 + V_{t,b}^2} = \sqrt{[0,5^2 + (4\cos 2l - 3)]^2} \sim V_{t,l}$$

Algunas lecturas: a $l=80^\circ$ $A=-6$, en $l=280^\circ$, $A=-8$; en $l=180^\circ$, $A=1$; esto da $A_{\min} = -7$, $\Delta A = 4 \text{ mas y}^{-1}$

Desplazamiento $B = -7 + 4 = -3$, por lo tanto, $B = -3 \text{ mas y}^{-1}$.

iv.

Utilice $\theta = \frac{r}{d}$ para ir a $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{u}{d}$

$$\frac{\theta}{(\text{mas})} = \frac{\frac{r}{|UA|}}{\frac{d}{(\text{kpc})}}$$

$$\frac{\theta}{(\text{mas})} = \frac{\frac{\Delta\theta}{\Delta t}}{\left[\frac{\text{mas}}{(\text{y})}\right]}$$

$$\frac{\Delta v}{[AUy^{-1}]} \left(\frac{d}{\text{kpc}}\right)^{-1}$$

Para convertir la velocidad de AU/y a km/s:

$$\frac{v}{[AUy^{-1}]} = \frac{v}{1,5 \times 10^8 \frac{\text{km}}{\text{s}} \times 10^7 \text{s}} = 4,76 \frac{v}{\frac{\text{km}}{\text{s}}}$$

$A = 19 \text{ kms}^{-1} \text{kpc}^{-1}$; $B = -14 \text{ km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$, $A = 16$, $B = -12$

g)

i.

A continuación, escribimos dos posibles respuestas:

$A = 19$, $b = -14$ y para $A = 15$, $B = -10$

$$\Omega_0 = A - B = 33 \text{ kms}^{-1} \text{kpc}^{-1}$$

Para el periodo el resultado en mas y^{-1} más conveniente:

$$\Omega_0 = 7 \text{ mas y}^{-1}.$$

$$P = 2\pi / \Omega_0 = 3,7 \times 10^8 \text{ y. } (2,8 \times 10^8 \text{ y})$$

ii.

$$V_o = \Omega_o R_o = 270 \text{ km/s}$$

iii.

Evaluado en el vecindario solar:

$$\left(\frac{\Delta v}{\Delta r}\right)_o = \Omega_o + R_o \left(\frac{\Delta \Omega}{\Delta r}\right)_o = \Omega_o + R_o k_o = -(A + B) = 5 \text{ kms}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

Opción 2:

i. Cuerpo Sólido $\Omega = \text{const}$, $u \sim r$, $\frac{\Delta \Omega}{\Delta r} = 0$ ii. $\Omega \sim r^{3/2}$, $u \sim r^{-1/2}$, $\frac{\Delta \Omega}{\Delta r} \sim 3/2 r^{-5/2}$; $\frac{1}{\Omega} \frac{\Delta \Omega}{\Delta r} \sim 3/2 r^{-1}$ iii. $u = \text{const}$, $\Omega = \frac{1}{r}$, $\frac{\Delta \Omega}{\Delta r} \sim -\frac{1}{r^2}$; $\frac{1}{\Omega} \frac{\Delta \Omega}{\Delta r} \sim -r^{-1}$ iv. Grafica u vs r I: recta que pasa por 0; II: curva descendente como $1/r^{1/2}$; III: línea horizontal

v.

I: $k_o = 0$, $A = 0$, $B = -\Omega_o$ II: $k_o = -3/2 \Omega_o / R_o$, $A = 3/4 \Omega_o$, $B = -\Omega_o / 4$; $B = -3A$ III: $k_o = -\Omega_o / R_o$, $A = \Omega_o / 2$, $B = -\Omega_o / 2$; $B = -A$

vi.

A partir de los valores $A = 19$ y $B = -14$, no puede ser que I o II se cumplan. Están más cerca de III

b.

i.

Estos se basan en mediciones de velocidad radial. Para estas se utilizaron estrellas o RGB porque son brillantes por lo que pueden verse a grandes distancias. Por ser rojas, sufrirán menos extinción.

ii.

Para $R < 5 \text{ kpc}$ gira como cuerpo sólido (modelo I)Para $R > 6 \text{ kpc}$ muestra una constante u (modelo III)

2.

Sí, la barra gira como un cuerpo sólido

iii.

$$\frac{v^2}{R} = G \frac{M}{R^2} \geq M = v^2 \frac{R}{G} = 2,27 \times 10^{11} M_\odot \text{ válido } (1,24 \times 10^{11} M_\odot)$$

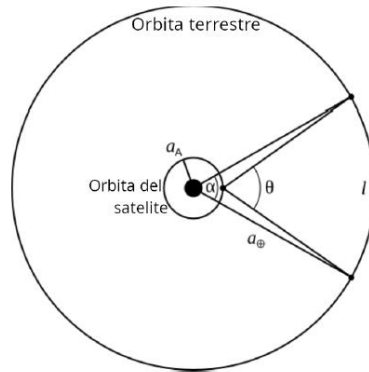
Problema 2:

El período de rotación ecuatorial del Sol es de 24.47 días. Por lo tanto, la nave debe realizar una órbita alrededor del Sol con el mismo período. Para que haya un momento favorable para la comunicación, es necesario que el Sol, la nave y la Tierra estén alineados en una línea recta. Esta configuración para la Tierra corresponderá a la conjunción inferior de la nave con el Sol. El tiempo entre dos culminaciones inferiores consecutivas de la nave es igual a su período sinódico:

$$\frac{1}{s_A} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_{\oplus}}$$

$$s_A = \frac{T_{\oplus} T_A}{T_{\oplus} - T_A} = \frac{365.2564 * 24.47}{365.2564 - 24.47} \sim 26,23 \text{ d}$$

Donde T_A es el período de rotación ecuatorial del Sol y $T_{\oplus}$ es el período sideral de la Tierra.



Ahora determinaremos la parte de la órbita que es favorable para la comunicación de la nave con la Tierra. Para ello, necesitamos determinar el radio de la órbita de la nave utilizando la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_A^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{a_A^3}{a_{\oplus}^3}$$

Donde $a_{\oplus}$ es el radio de la órbita de la Tierra. Expresaremos la distancia desde la nave hasta el Sol:

$$a_A = a_{\oplus} \left(\frac{T_A}{T_{\oplus}} \right)^{2/3} \sim 24,7 \text{ millones de km}$$

Usaremos un sistema de coordenadas en el que el Sol y la nave son estacionarios, y la Tierra se mueve alrededor del Sol con un período s_A . Al pasar por el diagrama de radiación de la antena θ , la Tierra gira un ángulo $\alpha < \theta$ alrededor del Sol (ver la figura). Supongamos que L es la longitud de la órbita terrestre iluminada por la antena. Dado que α es pequeño, podemos asumir que la distancia desde la nave hasta la Tierra durante la transmisión no cambia y es igual a $a_{\oplus} - a_A$. Luego, podemos escribir dos ecuaciones:

$$L = a_{\oplus} \frac{2\pi\alpha^{\circ}}{360^{\circ}} \text{ y } L = (a_{\oplus} - a_A) \frac{2\pi\theta^{\circ}}{360^{\circ}}$$

Iguualamos las partes derechas de las ecuaciones, simplificamos y obtenemos:

$$a_{\oplus}\alpha^{\circ} = (a_{\oplus} - a_A)\theta^{\circ}$$

De Donde,

$$\alpha^{\circ} = \theta^{\circ} \frac{a_{\oplus} - a_A}{a_{\oplus}} \sim 2,5^{\circ}$$

Por lo tanto, el tiempo de recepción de la señal desde la nave en la Tierra será una fracción del período sinódico completo:

$$\tau = s_A \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \sim 0,18 d \sim 4,4 h$$

Respuestas:

$$1. s_A = 26,23 d \text{ y } 2. \tau = 4,4 h$$

Problema 3

Determinando el tamaño angular de Marte durante la oposición. Se utiliza la fórmula para el tamaño angular:

$$p'' = \frac{206265 D}{r_0} = 24,6''$$

Ahora determinamos el tamaño lineal de la imagen de Marte en el plano focal:

$$x = F * \rho$$

Aquí, ρ , debe estar en radianes. Sustituyendo los valores, obtenemos:

$$x = F * \rho = 1000 mm \frac{24,6}{206265} = 0,1193 mm = 119,3 \mu m$$

Según las condiciones, un píxel tiene un tamaño de $5 \mu m$. Entonces, el diámetro lineal de la imagen de Marte será: $d = 119,3/5 \approx 23,9$ píxeles. Dado que Marte está en oposición, su fase es igual a 1 y se verá todo el disco de Marte en la imagen. Marte ocupará:

$$N_{\text{píxeles}} = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = 447 \text{ píxeles}$$

También podemos llegar a la misma respuesta calculando primero el área de la imagen de Marte en micrómetros cuadrados y luego dividiéndola por el área de un píxel, que es de $25 \mu m^2$.

Ahora, determinemos el número de fotones que llegan a 1 píxel durante el tiempo de exposición. Durante las grandes oposiciones, Marte tiene una magnitud estelar de -2.9 .

Calculemos la cantidad de fotones que llegan de Marte durante la exposición:

$$N_{\text{foton}} = N_0 \Delta t S 10^{-0,4(m-m_0)}$$

Donde Δt es el tiempo de exposición de la imagen, S es el área del objetivo del telescopio, N_0 es el número de fotones que llegan de una estrella de magnitud 0^m , y el factor $10^{-0,4(m-m_0)}$ muestra cuántas veces más intensamente se ilumina el objeto en comparación con una estrella de magnitud 0.

Usaremos la suposición de que todos los fotones tienen la misma energía. Luego, la relación de las intensidades es igual a la relación del número de fotones. Calculamos el número total de fotones que llegan a la cámara CCD:

$$N_{\text{foton}} = 10^6 \frac{1}{200} \frac{\pi 20^2}{200} 10^{-0,4(m-m_0)} = 22,7 \times 10^6 \text{ fotones}$$