

Prueba Teórica Grupal - Soluciones

1a. Se conoce la radio de la tierra $R_T = 6.370 \times 10^6 m$, entonces la radio de la órbita circular en la que se encuentra actualmente el satélite si está a una altura $h = 300 km$, es $r_1 = R_T + h = 6.670 \times 10^6 m$.

Al aplicar el impulso inicial la nave adquiere suficiente energía para estar en una órbita elíptica donde su apoapsis es igual a $r_2 = 2R_L$ y su periapsis igual a r_1 , por lo que el semieje mayor es $a_1 = \frac{r_1 + r_2}{2}$, mediante conservación de la energía se tiene que cumplir:

$$-\frac{GMm}{2a_1} = \frac{m(v_o + \Delta v_1)^2}{2} - \frac{GMm}{r_1}$$

Donde v_o es la velocidad en la nave en su órbita circular inicial $v_o = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$, y M la masa de la Tierra espejando Δv_1 :

obtenemos:

$$-\frac{GMm}{r_1 + r_2} = \frac{m(v_o + \Delta v_1)^2}{2} - \frac{GMm}{r_1}$$

$$v_o + \Delta v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \left[\sqrt{\frac{2r_2}{(r_1 + r_2)}} - 1 \right] = \boxed{3115.56 \text{ m/s}}$$

1b.

Cuando la nave está en el apoapsis de la primera órbita elíptica se encuentra a una distancia r_2 de la Tierra, en ese momento el segundo impulso le da suficiente energía para que la nave pase a una segunda órbita elíptica con semieje mayor $a_2 = \frac{r_2 + r_3}{2}$ donde $r_3 = R_L$, para calcular el segundo impulso primero encontramos la velocidad de la nave en el apoapsis de la primera órbita elíptica, por lo tanto por conservación de la energía se tiene:

$$-\frac{GMm}{r_1 + r_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_2}$$

despejando v_2 :

$$v_2 = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} = \sqrt{\frac{2GMr_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$$

Una vez se haya dado el segundo impulso por conservación de la energía se tiene:

$$\begin{aligned}
 -\frac{GMm}{2a_2} &= \frac{m(v_2 + \Delta v_2)^2}{2} - \frac{GMm}{r_2} \\
 -\frac{GMm}{r_2 + r_3} &= \frac{m(v_2 + \Delta v_2)^2}{2} - \frac{GMm}{r_2} \\
 \Delta v_2 + v_2 &= \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2 + r_3} \right)} = \sqrt{\frac{2GM r_3}{r_2(r_2 + r_3)}} \\
 \Delta v_2 &= \sqrt{\frac{2GM r_3}{r_2(r_2 + r_3)}} - \sqrt{\frac{2GM r_1}{r_2(r_1 + r_2)}} \\
 \Delta v_2 &= \sqrt{\frac{2GM}{r_2}} \left[\sqrt{\frac{r_3}{r_2 + r_3}} - \sqrt{\frac{r_1}{r_2 + r_1}} \right] = \sqrt{\frac{GM}{R_L}} \left[\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{R_T + h}{2R_L + R_T + h}} \right] = 494.83 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

1c.

Para calcular el impulso final que deja a la nave en una órbita circular con radio $r_3 = R_L$, primero calculamos la velocidad v_3 que tiene la nave cuando llega al periapsis de su segunda órbita elíptica, al igual que en los incisos anteriores usando la conservación de la energía encontramos v_3 :

$$\begin{aligned}
 -\frac{GMm}{r_3 + r_2} &= \frac{mv_3^2}{2} - \frac{GMm}{r_3} \\
 v_3 &= \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_3 + r_2} \right)} = \sqrt{\frac{2GM r_2}{r_3(r_3 + r_2)}}
 \end{aligned}$$

Justo después de impartir el último impulso, la energía de la nave cambia a la energía correspondiente a la de una órbita circular con radio $r_3 = R_L$, por conservación de la energía se tiene que:

$$-\frac{GMm}{2r_3} = \frac{m(v_3 + \Delta v_3)^2}{2} - \frac{GMm}{r_3}$$

Despejando Δv_3 :

$$\begin{aligned}
 \Delta v_3 + v_3 &= \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{2r_3} \right)} = \sqrt{\frac{GM}{r_3}} \\
 \Delta v_3 &= \sqrt{\frac{GM}{r_3}} - \sqrt{\frac{2GM r_2}{r_3(r_3 + r_2)}} = \sqrt{\frac{GM}{r_3}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_2}{(r_3 + r_2)}} \right) = \sqrt{\frac{GM}{R_L}} \left(1 - \sqrt{\frac{4}{3}} \right) \\
 \Delta v_3 &= \left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \right) \sqrt{\frac{GM}{R_L}} = -157.98 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

1d.

La transferencia de órbita comienza una vez dado el primer impulso y termina con el último impulso, entre estos dos sucesos la nave viaja la mitad de la totalidad de su primera órbita elíptica, la segunda parte del trayecto es después de aplicar el segundo impulso donde la nave viaja ahora media parte de su segunda órbita elíptica hasta llegar al punto deseado. El tiempo en completar este viaje es igual a la mitad del periodo orbital de la primera órbita elíptica más la mitad del periodo orbital de la segunda:

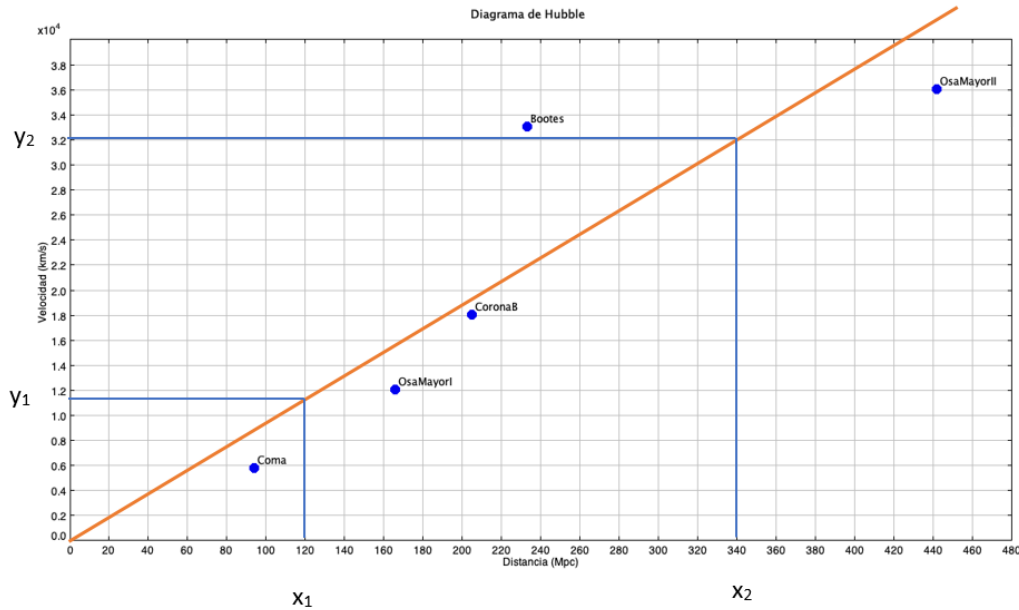
$$t = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{1}{2} \left(2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{GM}} + 2\pi \sqrt{\frac{a_2^3}{GM}} \right)$$

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{8GM}} (\sqrt{(r_1 + r_2)^3} + \sqrt{(r_3 + r_2)^3})$$

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{8GM}} \left(\sqrt{(R_T + h + 2R_L)^3} + 3\sqrt{3R_L^3} \right) = 3366976.4s = \boxed{38,96 \text{ días}}$$

Tabla 1							
Cúmulo	Número de Galaxias	Diámetro (D) (mm)	Distancia (d) (Mpc)	línea espectral	desplazamiento (Angstroms)	corrimiento al rojo (z)	velocidad Radial (km/s)
Coma	1	43	83.7	Línea H	76	0.19	5700
	2	30	120	Línea k	76	0.19	5700
	3	46	78.2	Banda-G	86	0.19	5700
Botas	1	12	300	Línea H	511	0.11	33000
	2	18	200	Línea k	517	0.11	33000
	3	18	200	Banda-G	Sin aplicación		
corona boreal	1	18	200	Línea H	276	0.06	18000
	2	19	189.5	Línea k	278	0.06	18000
	3	dieciséis	225	Banda-G	Sin aplicación		
Osa Mayor I	1	33	109.1	Línea H	196	0.04	12000
	2	23	180	Línea k	189	0.04	12000
	3	17	211.8	Banda-G	Sin aplicación		
Osa Mayor II	1	11	327.3	Línea H	551	0.12	36000
	2	6	600	Línea k	Sin aplicación		
	3	9	400	Banda-G	Sin aplicación		

2.



El valor de H_0 se estima conociendo la pendiente del ajuste en este diagrama el cual debe iniciar en el origen ya que describe la expansión del universo. Se deben de tomar dos puntos dañinos, en este caso:

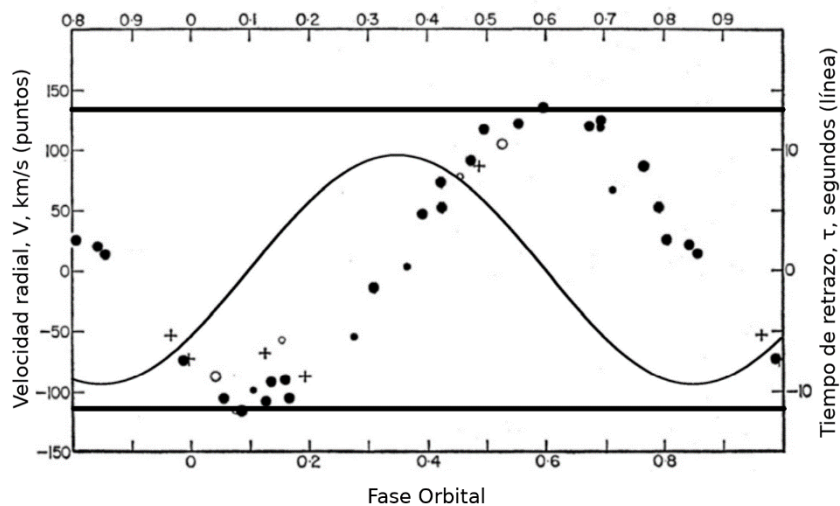
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(32000 - 11700)}{(340 - 120)} = 92,3 \text{ km/s/Mpc}$$

$$H_0 = 92,3 \text{ km/s/Mpc}$$

Debido a la metodología, el resultado puede variar en varias decenas.

3.

3a. A partir del gráfico, podemos determinar los valores límite de la velocidad radial de la estrella óptica: $v_+ \approx +130$ km/s, $v_- \approx -110$ km/s. Las velocidades no coinciden de módulo, por lo tanto, el centro de gravedad del sistema se mueve en relación con el observador con una velocidad



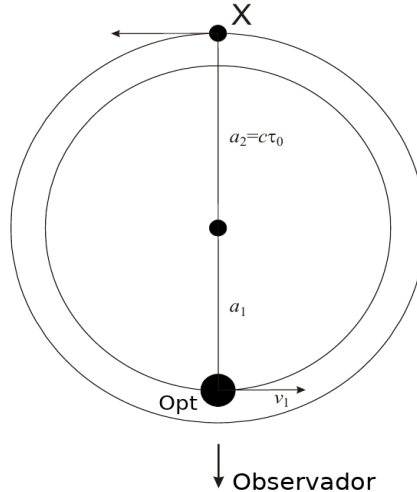
$$u = \frac{v_+ + v_-}{2} = 10 \text{ km/s}$$

3b.

Dado que la línea de visión se encuentra en el plano de las órbitas de las estrellas, la velocidad orbital de la estrella óptica $v_{\text{Opt}} = v_+ - u = u - v_- = 120 \text{ km/s}$

Las órbitas en el sistema son circulares y conocemos el período, entonces podemos definir el radio orbital de la estrella óptica:

$$a_1 = \frac{v_1 T_0}{2\pi} = 0.017 \text{ au}$$



3c. En el momento que se muestra en la figura, cuando la estrella óptica está más cerca del observador, y su velocidad radial se acerca a u y empieza a aumentar, la fuente de rayos X (estrella X), por el contrario, resulta ser la más lejana, y su señal llega con el máximo de retazo. En la figura 1 vemos que el retardo es sinusoidal, con amplitud $\tau_0 = 9,5$ segundos. De aquí obtenemos el radio orbital de la estrella X:

$$a_2 = c\tau_0 = 0,019 \text{ au}$$

3d. Expresando el periodo orbital T_0 en años (0.00424 años), obtenemos la suma de las masas de las estrellas, en masas solares usando la 3era ley de Kepler:

$$M = m_1 + m_2 = \frac{(a_1 + a_2)^3}{T^2} = 2.6$$

Para determinar las masas de los cuerpos por separado, recuerde que de la definición del centro de masa $a_1 m_1 = a_2 m_2$ y obtenemos:

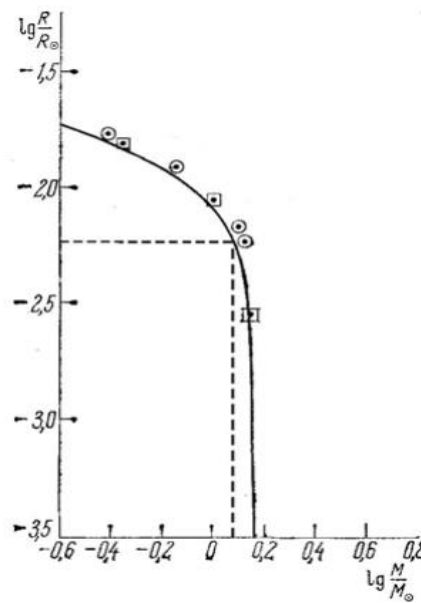
$$m_{1,2} = M \frac{a_{2,1}}{a_1 + a_2} = \frac{a_{2,1}(a_1 + a_2)^2}{T^2}$$

La masa de la estrella óptica resulta ser $1,4 M_\odot$, y la masa de una estrella X de $1,2 M_\odot$.

[De hecho, ambas cantidades son $0,1 M_\odot$ mayores (aquí no tenemos en cuenta una ligera inclinación de la órbita con respecto a la línea de mira)].

3e.

Ahora, conociendo la masa de la enana blanca, podemos encontrar su radio característica usando la dependencia que se muestra en la figura 2. La masa de la enana blanca está cerca del límite, por lo tanto, los errores en su determinación pueden afectar significativamente el valor del radio. Sin embargo, la radio en la gráfica se da en una escala logarítmica, y la precisión de los datos del problema es, en principio, suficiente para estimar su magnitud. Con una masa de $1,2M_{\odot}$, el radio de la enana blanca R_{WD} es de ~ 4000 km.



Sea ω la frecuencia de rotación de la enana blanca en el momento actual, dentro de un intervalo de tiempo Δt será igual a $\omega + \Delta\omega$. En este caso, el período de rotación P disminuirá y se deseará en igual a $P - \Delta P$. Dado que el producto de la frecuencia y el período es un valor constante (2π), para pequeñas variaciones:

$$\frac{\omega + \Delta\omega}{\omega} = \frac{P}{P - \Delta P} = \frac{P + \Delta P}{P}$$

Por lo tanto, $\Delta\omega / \omega = \Delta P / P$. El momento de inercia de la enana blanca en el momento inicial es:

$I = km_2 R^2$. El valor de k es igual a 0,4, aunque esto no es necesario para resolver este problema, solo es importante que el coeficiente k sea constante en el tiempo. Después de un tiempo Δt , el radio disminuye en ΔR . Según la ley de conservación del momento angular:

$$km_2 (R - \Delta R)^2 (\omega + \Delta\omega) \approx km_2 R^2 \omega - 2km_2 R \Delta R \omega + km_2 R^2 \Delta\omega = km_2 R^2 \omega$$

De aquí:

$$\Delta R = R \frac{\Delta\omega}{2\omega} = R \frac{\Delta P}{2P}$$

Durante el tiempo Δt , el período cambiará en $\Delta P = P' \Delta t$, donde P' es el cambio adimensional del período especificado en la pregunta. Y ahora podemos calcular cuánto se ha contraído la enana durante el tiempo de observación:

$$\Delta t = 20 \text{ años: } \sim 24 \text{ cm (} = 23,89 \text{ cm)}$$

4.

Nota: incertidumbres, los resultados tienen un máximo de 5% de incertidumbre.

a) $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ en las unidades sugeridas: $\frac{\left(\frac{a}{1AU}\right)^3}{\left(\frac{P}{1yr}\right)^2} = \frac{M}{M_{sol}}$ (Ecuación 3)

b) $\tan(\theta_a) = \frac{a}{d}$ pero para $a \ll d$ $\theta_a = \frac{a}{d}$ (Ecuación 4), el ángulo se mide en rad

De la definición de parsec: $\theta_{a('')} = \frac{\frac{a}{1AU}}{\frac{d}{1pc}} = \frac{a}{1AU} = \theta_{a('')} \frac{d}{1pc}$ (Ecuación 5).

Combinando con Ecuación 3:

$$\theta_{a''}^3 \left(\frac{d}{1pc}\right)^3 = \left(\frac{M}{M_{sol}}\right) \left(\frac{P}{1y}\right)^2$$

$$P_{años} = 10^{3/2} \theta_{a''}^{3/2} M_6^{-1/2} d_{kpc}^{3/2} \text{ (Ecuación 6)}$$

donde las cantidades deben interpretarse como: $P_{años}$ se mide en años, $\theta_{a''}$ el ángulo se mide en segundos de arco, M_6 la masa se mide en $10^6 M_{sol}$ y d_{kpc} se mide en kpc.

c) Tomando el logaritmo de la ecuación 6 da:

$$\log P_{años} = 1.5 + \frac{3}{2} \log(d_{kpc}) - \frac{1}{2} \log M_6 + \frac{3}{2} \log \theta_{a''} \text{ (Ecuación 7)}$$

En una gráfica de $\log P$ vs $\log \log(\theta_a)$, esta es una línea recta

d) Gráfico de los datos

e) Línea de mejor ajuste: $\log P = 1.5 \log(\theta_a) + 2.56$ (Ecuación 8)

f) Comparando Ecuación 8 y Ecuación 7 da $2 \log d_{o,kpc} - \log M_{c,6} = 2.1246$ (Ecuación 9).

2.

a) Nos dan la velocidad máxima $h v_{max} = 7650 \text{ kms}^{-1}$

Esto corresponde al pericentro : $r_p = r(\theta = 0) = a(1 - e)$ y

$$|v_-| = v(r_p) = \sqrt{\frac{GM_c}{a} \frac{1+e}{1-e}} \text{ (Ecuación 10).}$$

A partir de los datos de la Tabla, el semieje mayor para S2 es $a = 0.123'' 10^3 d_{kpc} 1.5 \times 10^{11} m = 1.845 \times 10^{13} d_{kpc} m$ (Ecuación 11) y sustituyendo en (Ecuación 10),

$$M_c = 10^6 \times 210^{30} \text{ kg } M_6 \text{ obtenemos } \frac{M_6}{d_{kpc}} = 0.52 \Rightarrow \log d_{kpc} - \log M_6 = 0.283 \text{ (Ecuación 12)}$$

b) Combinando las ecuaciones 9 y 12, obtenemos $d = 8.3 \text{ kpc}$ y $M_{c,6} = 4.3$ así $M_c = 4.3 \times 10^6 M_{sol}$

c) La estrella más cercana es S2: El objeto central debe estar dentro del pericentro de S2 (usando la ecuación 11)

$$\text{i) } R < 1.845 \times 10^{13} (1 - 0.88) (8.3 m) = 1.84 \times 10^{13} m$$

$$\text{ii) } R_s = \frac{2GM}{c^2} = 1.275 \times 10^{10} m$$

$$\text{iii) el tamaño angular del BH es } 2 \frac{R_s}{d_o} = \frac{2.45 \times 10^{10}}{(8.3) \times (3.09 \times 10^{19})} = 0.95 \times 10^{-10}$$

La resolución angular es $1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.95 \times 10^{-10}$

$$D = 1.2 \times \frac{1.5}{0.95} \times 10^{-3+10} m$$

$$D \approx 2 \times 10^7 m \text{ más grande que el tamaño de la Tierra!}$$

