

Por tanto, la velocidad media de expansión de la estrella es:

$$v = \frac{\Delta R}{\Delta t}$$

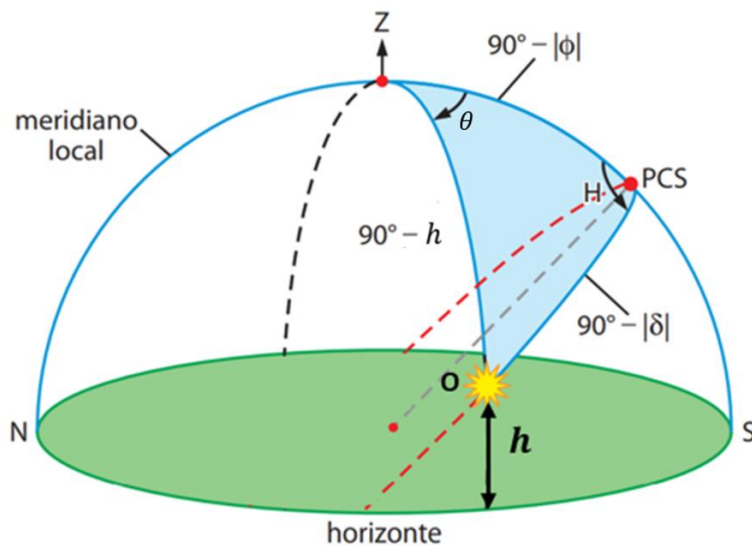
$$\Delta R = R_2 - R_1 \Rightarrow v = \frac{0,0961.6,17.10^{11}}{125.24.3600} \Rightarrow \boxed{v = 5492 \text{ m/s} = 5,5 \text{ km/s}}$$

$$R_2 = 1,0961.R_1$$

$$R_1 = 6,17.10^{11} \text{ m}$$

Prueba Teórica Grupal - Soluciones

1) a) Representando el triángulo de posición para un objeto (O), de declinación negativa, en Intihuatana, de la Ley de cosenos y senos para triángulos esféricos, tenemos que la altura h de los objetos representados en la tabla y el acimut A se pueden calcular a través de las siguientes ecuaciones:



Altura (h):

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - |\phi|) \cdot \cos(90^\circ - |\delta|) + \sin(90^\circ - |\phi|) \cdot \sin(90^\circ - |\delta|) \cdot \cos H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin h = \sin |\phi| \cdot \sin |\delta| + \cos |\phi| \cdot \cos |\delta| \cdot \cos H \Rightarrow$$

Acimut (A):

$$A = \theta + 180^\circ$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin(90^\circ - |\delta|)} = \frac{\sin H}{\sin(90^\circ - h)} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sin H \cdot \cos |\delta|}{\cos h}$$

- Para la Luna:

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow 22h14 \text{ min} = H + 16h47 \text{ min} \Rightarrow H = 5h27 \text{ min}$$

$$\sin h = \sin 13^\circ 09' 45'' \sin 23^\circ 32' + \cos 13^\circ 09' 45'' \cdot \cos 23^\circ 32' \cdot \cos 81^\circ 45' \Rightarrow h = 12^\circ 39' 06''$$

$$\sin \theta = \frac{\sin 81^\circ 45' \cdot \cos 23^\circ 32'}{\cos 12^\circ 39' 06''} \Rightarrow \theta = 68^\circ 25' 20'' \Rightarrow A = 248^\circ 25' 20''$$

- Para venus:

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow 22h14min = H + 18h06min \Rightarrow H = 4h08min$$

$$\sin h = \sin 13^\circ 09' 45'' \sin 27^\circ 14' + \cos 13^\circ 09' 45'' \cdot \cos 27^\circ 14' \cdot \cos 62^\circ \Rightarrow h = 30^\circ 42' 30''$$

$$\sin \theta = \frac{\sin 62^\circ \cdot \cos 27^\circ 14'}{\cos 30^\circ 42' 30''} \Rightarrow \theta = 65^\circ 56' 20'' \Rightarrow A = 245^\circ 56' 20''$$

Para Altaïr (perteneciente al hemisferio norte celeste):

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow 22h14min = 2h23min + \alpha \Rightarrow \alpha = 19h51min$$

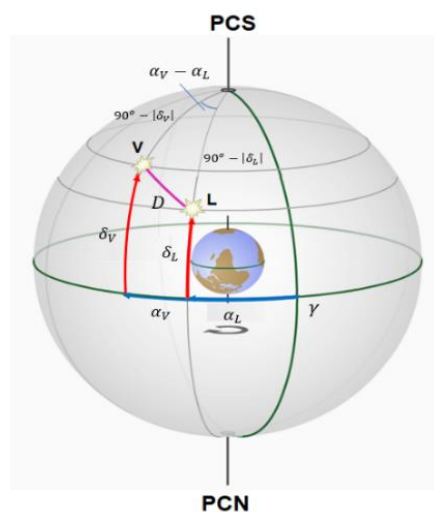
$$\sin h = -\sin 13^\circ 09' 45'' \sin 8^\circ 55' + \cos 13^\circ 09' 45'' \cdot \cos 8^\circ 55' \cdot \cos 35^\circ 45' \Rightarrow h = 48^\circ 11' 39''$$

$$\sin \theta = \frac{\sin 35^\circ 45' \cdot \sin(90^\circ + 8^\circ 55')}{\cos 48^\circ 11' 39''} \Rightarrow \theta = 59^\circ 58' 51'' \Rightarrow A = 239^\circ 58' 51''$$

Completando la tabla correctamente, tenemos:

Objeto	α	δ	H	A	h
Luna	16h47min	$-23^\circ 32'$	5h27min	248° 25' 20''	12° 39' 06''
Venus	18h06min	$-27^\circ 14'$	4h08min	245° 56' 20''	30° 42' 30''
Altaïr	19h51min	$+8^\circ 55'$	2h23min	239° 58' 51''	48° 11' 39''

b) Siendo **V** y **L** las posiciones de Venus y la Luna sobre la esfera celeste, de la Ley de los cosenos para triángulos esféricos tenemos que la separación angular **D** entre los dos astros en este instante es:

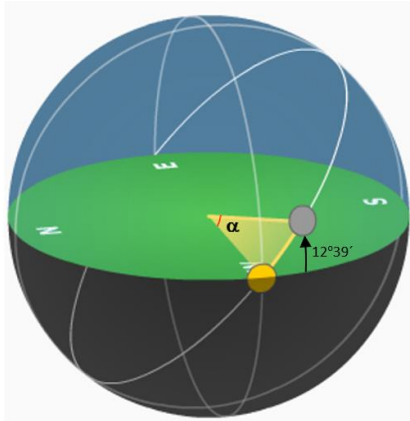


$$\Rightarrow \cos D = \sin |\delta_V| \cdot \sin |\delta_L| + \cos |\delta_V| \cdot \cos |\delta_L| \cdot \cos(\alpha_V - \alpha_L) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos D = \sin 27^\circ 14' \cdot \sin 23^\circ 32' + \cos 27^\circ 14' \cdot \cos 23^\circ 32' \cdot \cos 19^\circ 45' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos D = 0,9499 \Rightarrow \boxed{D = 18^\circ 12'}$$

c) Sabiendo que al atardecer el ángulo horario de la Luna era de $5^h 27^{\text{min}}$ y su altura de $12^\circ 39'$, tenemos que la Luna estaba cerca del horizonte occidental. Como el ángulo de fase ($\angle$) es menor de 6^h , concluimos que la Luna está en fase **Creciente**.



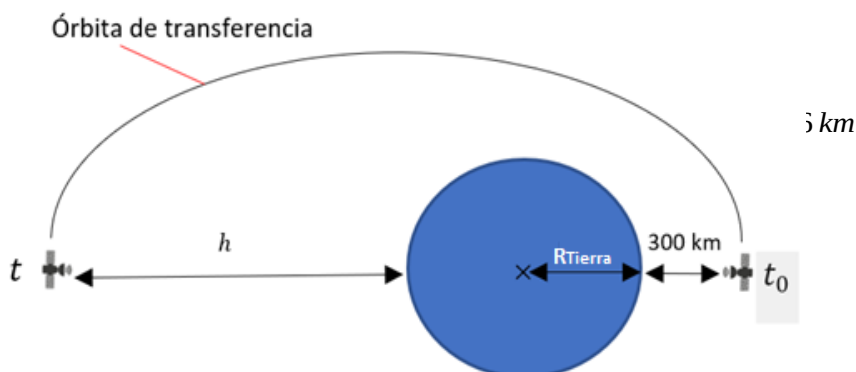
2) a) De la 3ª Ley de Kepler, tenemos que el radio orbital (r) del satélite en situación geostacionaria es:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Terra}}} \cdot r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_{\text{Terra}} P^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot (23,9345 \cdot 3600)^2}{4 \cdot (3,14)^2}} \Rightarrow r = 42\,164,3 \text{ km}$$

Por lo tanto, la altitud (h) que debe tener el satélite es:

$$r = R_{\text{Terra}} + h \Rightarrow h = r - R_{\text{Terra}} = 42\,164,2 - 6371 \Rightarrow \boxed{h = 35\,793,3 \text{ km}}$$

b) Sabiendo que el satélite se encuentra inicialmente en una órbita de reserva a 300 km de la superficie terrestre, tenemos que el semieje mayor (a) de la órbita de transferencia es:



De la 3ra Ley de Kepler, tenemos que el periodo P' asociado al semieje (a) es:

$$P'^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{Terra}} \cdot a^3 \Rightarrow P' = 2\pi \cdot a \sqrt{\frac{a}{GM_{Terra}}} = 2.3,14.2,44.10^7 \cdot \sqrt{\frac{2,44.10^7}{6,67.10^{-11} \cdot 5,97.10^{24}}} \Rightarrow P' = 3,79.10^4 \text{ s}$$

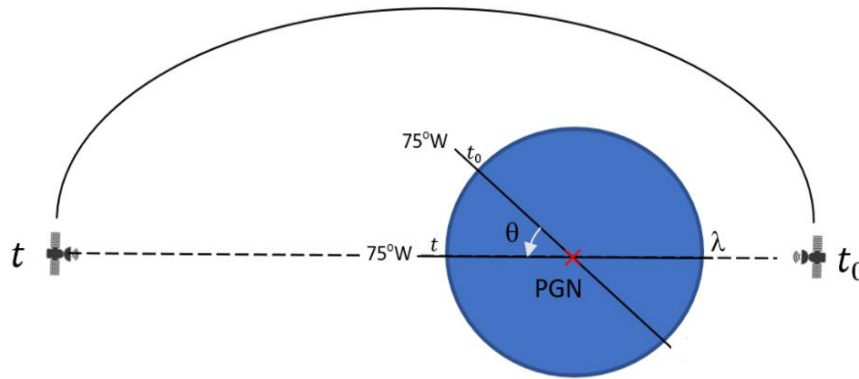
Por lo tanto, el tiempo de viaje (Δt) del periastron al apoastron es:

$$\Delta t = \frac{P'}{2} = \frac{3,79.10^4}{2} \Rightarrow \Delta t = 1,895.10^4 \text{ s}$$

Durante la maniobra, el ángulo θ que la Tierra giró alrededor de su eje fue:

$$\theta = \omega \cdot \Delta t = \frac{360^\circ}{P_{sideral}} \cdot \Delta t = \frac{360^\circ}{23,93.3600} \cdot 1,895 \times 10^4 \Rightarrow \theta = 79^\circ 11'$$

Por lo tanto, la longitud geográfica λ a la que se debe dar el impulso inicial para que se produzca el apogeo en la longitud 75° W es:



$$\lambda = 180^\circ - \theta + 75^\circ = 180^\circ - 79^\circ 11' + 75^\circ \Rightarrow \boxed{\lambda = 175^\circ 49' \text{ W}}$$

c) De la ecuación de Tsiolkovsky y del impulso específico, tenemos que la relación entre las masas totales al inicio de la maniobra y al final de la maniobra es:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} \Delta V = V_e \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) \\ V_e = I_{SP} \cdot g_0 \end{array} \right. &\Rightarrow \Delta V = I_{SP} \cdot g_0 \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) \Rightarrow 2426 + 1467 = 400.9,81 \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) = 0,9921 \Rightarrow \frac{m_0}{m_f} = 2,6969 \end{aligned}$$

Considerando todos los componentes, tenemos que la masa total está compuesta por el motor vacío $m_m = 165 \text{ kg}$, el combustible m_c y el satélite $m_s = 5000 \text{ kg}$ (carga útil). Al inicio de la maniobra el depósito contenía $m_{ci} = 8800 \text{ kg}$ combustible. Por tanto, cuál será la masa final de combustible m_{cf} que queda en el depósito al finalizar la maniobra:

$$\frac{m_0}{m_f} = \frac{m_m + m_{ci} + m_s}{m_m + m_{cf} + m_s} = 2,6969 \Rightarrow \frac{165 + 8800 + 5000}{165 + m_{cf} + 5000} = 2,6969 \Rightarrow m_{cf} = 13,17 \text{ kg}$$

Por tanto, la masa de combustible utilizada $m_{\text{útil}}$ para salir de la órbita de espera y colocar el satélite en órbita geoestacionaria fue:

$$m_{\text{útil}} = 8800 - 13,178 \Rightarrow m_{\text{útil}} = 8786,8 \text{ kg}$$

3) a) De la definición de flujo, tenemos:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{10^{11} \cdot L_{\text{Sol}}}{4\pi d^2} = \frac{10^{11} \cdot 3,83 \cdot 10^{26}}{4,3,14 \cdot (3,26 \cdot 9,46 \cdot 10^{15})^2} \Rightarrow F = 3,21 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

b) Sabiendo que el flujo de corriente es $F_0 = 1366 \text{ W/m}^2$, tenemos que el factor n por el cual aumentará el flujo luminoso será:

$$n = \frac{F}{F_0} = \frac{3,21 \cdot 10^3}{1366} \Rightarrow n = 2,35$$

c) La potencia luminosa recibida (P_R) por el planeta Tierra, de radio r , debido a la supernova es:

$$F = \frac{P_R}{\pi \cdot r^2} \Rightarrow P_R = F \cdot \pi \cdot r^2$$

Considerando al planeta Tierra como un cuerpo negro ideal ($\epsilon = 1$) en equilibrio térmico, tenemos que la potencia recibida (P_R) es igual a la potencia emitida (P_E), entonces:

$$\left| \begin{array}{l} P_E = \epsilon 4\pi r^2 \sigma T^4 \\ P_R = F \pi r^2 \end{array} \right. \Rightarrow \epsilon 4\pi r^2 \sigma T^4 = F \pi r^2 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{F}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{3,21 \cdot 10^3}{4,5,67 \cdot 10^{-8}}} \Rightarrow T = 350 \text{ K} = 72^\circ \text{ C}$$

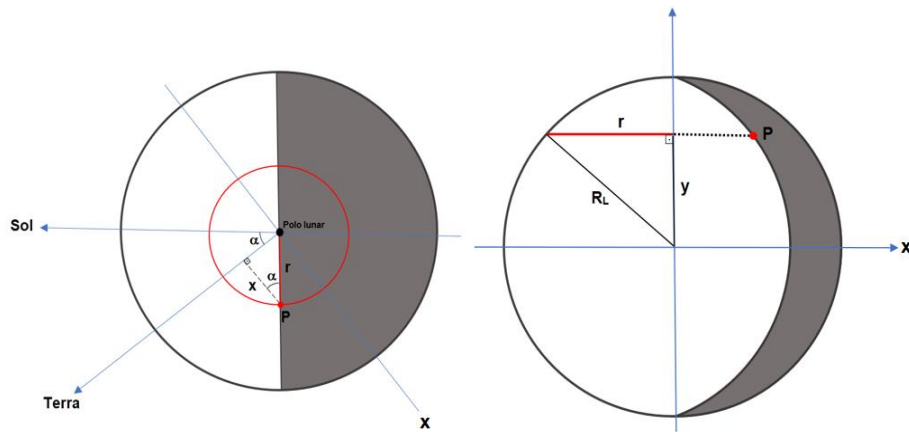
d) Para que no se ponga en peligro la vida, en equilibrio térmico, el caudal máximo ($F_{\text{máx}}$) debe ser:

$$F_{\text{máx}} = 4\sigma T_{\text{máx}}^4 = 4,5,67 \times 10^{-8} \cdot (303)^4 \Rightarrow F_{\text{máx}} = 1911,67 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Por tanto, la distancia mínima a la ($d_{\text{mín}}$) que debe ocurrir esta explosión de supernova es:

$$F_{\text{máx}} = \frac{10^{11} \cdot L_{\text{Sol}}}{4\pi d_{\text{mín}}^2} \Rightarrow d_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{10^{11} \cdot L_{\text{Sol}}}{4\pi \cdot F_{\text{máx}}}} = \sqrt{\frac{10^{11} \cdot 3,83 \cdot 10^{26}}{4,3,14 \cdot 1911,67}} \Rightarrow d_{\text{mín}} = 4 \cdot 10^{16} \text{ m} = 1,3 \text{ pc}$$

4) a) Siendo r el radio del círculo paralelo en la latitud del punto P y R_L el radio lunar, de las construcciones siguientes, tenemos:



$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{x}{R_L} \\ R_L^2 = y^2 + r^2 \end{cases} \Rightarrow R_L^2 = y^2 + \left(\frac{x}{\cos \alpha} \right)^2 \Rightarrow 1 = \left(\frac{y}{R_L} \right)^2 + \left(\frac{x}{R_L \cdot \cos \alpha} \right)^2$$

Comparando el resultado anterior con la ecuación reducida de la elipse, centrada en el origen, con semieje mayor a y semieje menor b , tenemos que la excentricidad e vendrá expresada por:

$$1 = \left(\frac{y}{a} \right)^2 + \left(\frac{x}{b} \right)^2, \quad a = R_L, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad b = R_L \cdot \cos \alpha$$

$$e = \frac{\sqrt{R_L^2 - R_L^2 \cos^2 \alpha}}{R_L} = \frac{R_L \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{R_L} = \sqrt{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{e = \sin \alpha}$$

b) Comparando el flujo luminoso de la Luna en fase α (F) con el flujo luminoso en fase Llena (F_T), tenemos:

$$\frac{F}{F_T} = \frac{A}{A_T} = \frac{\frac{A_{\text{circ}}}{2} + \frac{A_{\text{elip}}}{2}}{A_{\text{circ}}} \Rightarrow \frac{F}{F_T} = \left(\frac{\pi R_L^2}{2} + \frac{\pi ab}{2} \right) \cdot \frac{1}{\pi R_L^2} = \left(\frac{\pi R_L^2}{2} + \frac{\pi R_L^2 \cos \alpha}{2} \right) \cdot \frac{1}{\pi R_L^2} \Rightarrow \frac{F}{F_T} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

De la ecuación de Pogson tenemos:

$$m - m_T = -\frac{5}{2} \cdot \log \left(\frac{F}{F_T} \right) \Rightarrow \boxed{m = m_T - \frac{5}{2} \cdot \log \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)}$$

Para dibujar la gráfica debemos recordar que $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, entonces:

$$m_{\text{máx}} = m_T - \frac{5}{2} \cdot \log \left(\frac{1-1}{2} \right) \Rightarrow m_{\text{máx}} = +\infty; \text{ válido para } \alpha = (2n-1)\pi; n \in \mathbb{Z}.$$

$$m_{\min} = m_T - \frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{1+1}{2}\right) \Rightarrow m_{\min} = m_T; \text{ válido para } \alpha = 2n\pi; n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto:

