

Prueba Teórica Grupal - Soluciones

Pregunta 1:

Sabiendo que el radio angular aparente con el que se observa la estrella Nenque desde el exoplaneta Eyeke es $s_{Nenque} = 1,9^\circ$, y siendo r la distancia entre los centros de masa de Eyeke y Nenque, tenemos que el radio de la estrella Nenque R_N está dado por:

$$R_N = r \cdot s_{Nenque}$$

Comparando la aceleración gravitacional en la superficie de Eyeke g_E con la del planeta Tierra g_T , tenemos que la masa de Eyeke M_E se puede expresar por:

$$\begin{cases} g_E = 1,9 \cdot g_T \\ g_E = \frac{G \cdot M_E}{R_E^2} \Rightarrow M_E = \frac{1,9 \cdot g_T \cdot R_E^2}{G} \end{cases}$$

De la 3ra Ley de Kepler, la masa M_N de la estrella de Nenque es:

$$\frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_N} \Rightarrow M_N = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot P^2}$$

Por tanto, considerando los cuerpos esféricos, tenemos que la relación entre las densidades medias de Eyeke y Nenque se puede expresar por:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{Eyeke}}{\rho_{Nenque}} &= \frac{M_E}{V_E} \cdot \frac{V_N}{M_N} \Rightarrow \frac{\rho_{Eyeke}}{\rho_{Nenque}} = \frac{M_E}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R_N^3}{M_N} \Rightarrow \frac{\rho_{Eyeke}}{\rho_{Nenque}} = \frac{M_E}{M_N} \cdot \left(\frac{R_N}{R_E}\right)^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\rho_{Eyeke}}{\rho_{Nenque}} = \frac{1,9 \cdot g_T \cdot R_E^2}{G} \cdot \left(\frac{r \cdot s_{Nenque}}{R_E}\right)^3 = \frac{1,9 \cdot g_T \cdot P^2 \cdot s_{Nenque}^3}{4\pi^2 \cdot R_E} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\rho_{Eyeke}}{\rho_{Nenque}} = \frac{1,9 \cdot 9,81 \cdot (22.864 \cdot 10^4)^2 \cdot (1,9 \cdot 3600 \cdot 4,848 \cdot 10^{-6})^3}{4\pi^2 \cdot 5,053 \cdot 10^7} \Rightarrow \boxed{\frac{\rho_{Eyeke}}{\rho_{Nenque}} = 1,23} \end{aligned}$$

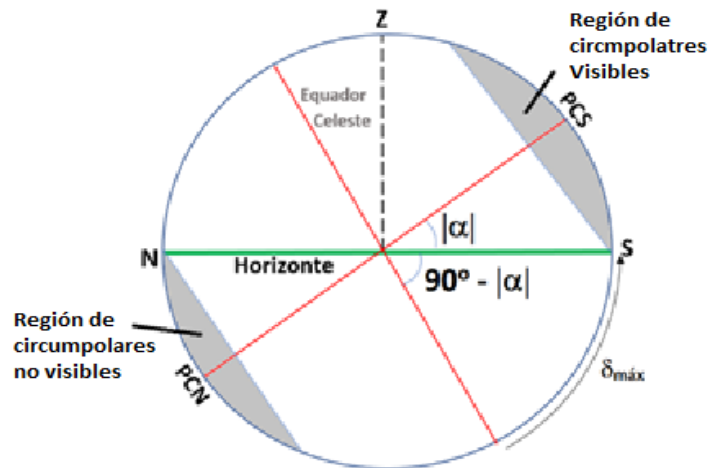
Pregunta 2:

a) Representando la región de circumpolaridad visible para un observador en el hemisferio sur, tenemos:

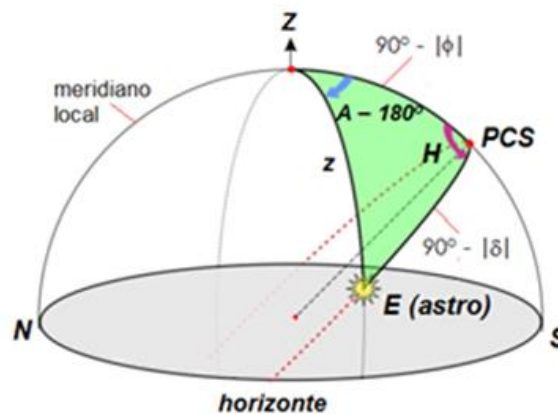
Analizando la representación del lado, para que la estrella pertenezca a la región de la circumpolaridad visible, el módulo de su declinación debe ser mayor que el módulo de la declinación máxima indicada, por lo tanto:

$$|\delta| > |\delta_{m\acute{a}x}| \Rightarrow |\delta| > 90^\circ - |\alpha|$$

Como $\delta < 0$, entonces: $\boxed{\delta < 90^\circ - |\alpha|}$



b) Sea E cualquier estrella de declinación δ y distancia cenital z visible para un observador en el hemisferio sur con latitud $\phi < 0$, tenemos:



A partir de la Ley de los cosenos para triángulos esféricos se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(90^\circ - |\phi|) \cdot \cos(90^\circ - |\delta|) + \sin(90^\circ - |\phi|) \cdot \sin(90^\circ - |\delta|) \cdot \cos H \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos z &= \sin |\phi| \cdot \sin |\delta| + \cos |\phi| \cdot \cos |\delta| \cdot \cos H \Rightarrow \cos H = \cos z \cdot \sec |\phi| \cdot \sec |\delta| - \operatorname{tg} |\phi| \cdot \operatorname{tg} |\delta|\end{aligned}$$

En la situación de salida y puesta de una estrella, su distancia cenital tiene un valor de $z = 90^\circ$, por lo tanto:

$$\cos H = \cos 90^\circ \cdot \sec |\phi| \cdot \sec |\delta| - \operatorname{tg} |\phi| \cdot \operatorname{tg} |\delta| \Rightarrow \boxed{\cos H = -\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta}$$

c) De la relación obtenida en el inciso b, y recordando que $1h = 15^\circ$ tenemos que el ángulo horario de puesta de la estrella es:

$$\cos H = -\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta = -\operatorname{tg}(-30^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-45^\circ) \Rightarrow H = 125,26^\circ = 8,35 h$$

Por tanto, el tiempo que la estrella permanece sobre el horizonte (hora de salida y puesta del sol) para el observador en la situación impuesta es:

$$\Delta t = 2.H \Rightarrow \Delta t = 2.8,35 \Rightarrow \Delta t = 16,7 \text{ h}$$

Pregunta 3:

a) Como la maniobra debe realizarse con el mínimo gasto de energía, tenemos que el módulo de transferencia debe ser del tipo Hohmann, es decir, una órbita semielíptica con dos impulsos. La primera al salir de la órbita C, de radio r_C , y la segunda al atracar en la órbita, de radio r_A , cuyos valores se pueden obtener de la 3ª Ley de Kepler :

$$\frac{P_C^2}{r_C^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow \frac{(90.60)^2}{r_C^3} = \frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11}.5,97.10^{24}} \Rightarrow r_C = 6,65.10^6 \text{ m}$$

$$\frac{P_A^2}{r_A^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow \frac{(120.60)^2}{r_A^3} = \frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11}.5,97.10^{24}} \Rightarrow r_A = 8,06.10^6 \text{ m}$$

El semieje mayor a de la órbita de transferencia es:

$$a = \frac{r_A + r_C}{2} = \frac{8,06.10^6 + 6,65.10^6}{2} \Rightarrow a = 7,35.10^6 \text{ m}$$

Al salir de la órbita del radio, r_C el módulo tendrá la primera variación de velocidad, que consiste en la diferencia entre su velocidad final v_f , en una órbita elíptica, y su velocidad inicial v_i , en una órbita circular. Entonces Δv_1 es:

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= v_f - v_i \\ v_i &= \sqrt{\frac{GM_T}{r_C}} \Rightarrow \Delta v_1 = \sqrt{GM_T \left(\frac{2}{r_C} - \frac{1}{a} \right)} - \sqrt{\frac{GM_T}{r_C}} \Rightarrow \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_C}} \cdot \left(\sqrt{2 - \frac{r_C}{a}} - 1 \right) \Rightarrow \\ v_f &= \sqrt{GM_T \left(\frac{2}{r_C} - \frac{1}{a} \right)} \\ \Rightarrow \Delta v_1 &= \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.5,97.10^{24}}{6,65.10^6}} \cdot \left(\sqrt{2 - \frac{6,65.10^6}{7,35.10^6}} - 1 \right) \Rightarrow \Delta v_1 = 360 \text{ m/s} \end{aligned}$$

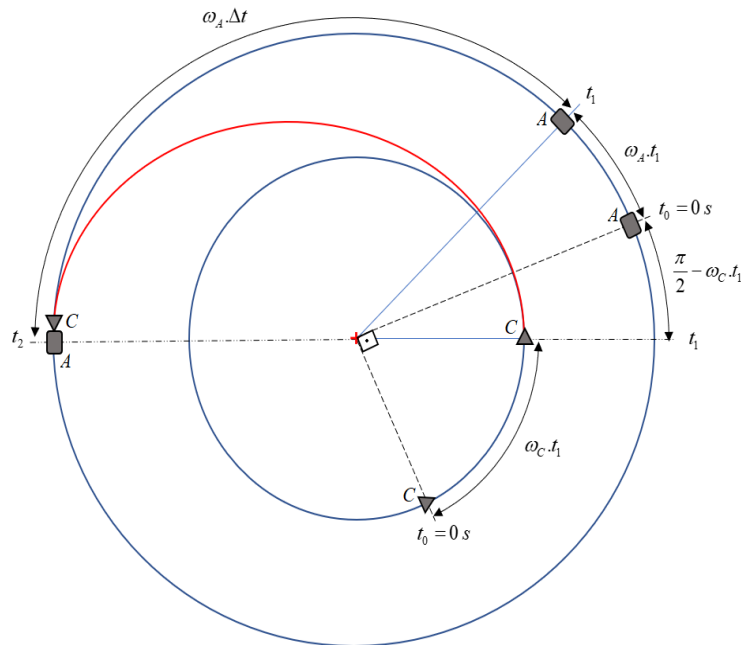
Al acoplarse a la estación espacial, el módulo pasará por la segunda variación de velocidad, que consiste en la diferencia entre su velocidad final v'_f , en una órbita circular, y su velocidad inicial v'_i , en una órbita elíptica. Entonces Δv_2 es:

$$\begin{aligned}
 \Delta v_2 &= v'_f - v'_i \\
 v'_f &= \sqrt{\frac{GM_T}{r_A}} \Rightarrow \Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_A}} - \sqrt{GM_T \left(\frac{2}{r_A} - \frac{1}{a} \right)} \Rightarrow \Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_A}} \cdot \left(1 - \sqrt{2 - \frac{r_A}{a}} \right) \Rightarrow \\
 v'_i &= \sqrt{GM_T \left(\frac{2}{r_A} - \frac{1}{a} \right)} \\
 \Rightarrow \Delta v_2 &= \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{8,06 \cdot 10^6}} \cdot \left(1 - \sqrt{2 - \frac{8,06 \cdot 10^6}{7,35 \cdot 10^6}} \right) \Rightarrow \boxed{\Delta v_2 = 348 \text{ m/s}}
 \end{aligned}$$

El intervalo de tiempo para Δt la maniobra consiste en la mitad del período de una órbita semieje a alrededor de la Tierra. De la 3ra Ley de Kepler, tenemos que el valor de Δt es:

$$\begin{aligned}
 \frac{P^2}{a^3} &= \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow \frac{\Delta t^2}{4a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow \frac{4\Delta t^2}{(7,35 \cdot 10^6)^3} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}} \Rightarrow \Delta t = 3135 \text{ s} \\
 \Delta t &= \frac{P}{2}
 \end{aligned}$$

Considerando que la estación espacial A tiene una velocidad angular ω_A , y que el módulo C , donde se encuentra Carlos, tiene una velocidad angular ω_C antes del inicio del traslado; y siendo $t_0 = 0$, t_1 y t_2 , respectivamente, el tiempo inicial, el tiempo de inicio de la maniobra y el tiempo de finalización de la maniobra; y contando los desplazamientos angulares en sentido contrario a las agujas del reloj desde la posición de C at $t_0 = 0$, del esquema de escalado tenemos:



$$\begin{aligned}
 \omega_A \cdot \Delta t + \omega_A \cdot t_1 + \frac{\pi}{2} - \omega_C \cdot t_1 &= \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{P_A} \cdot \Delta t + \frac{2\pi}{P_A} \cdot t_1 + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{P_C} \cdot t_1 = \pi \Rightarrow t_1 = \left(\frac{P_A \cdot P_C}{P_C - P_A} \right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{\Delta t}{P_A} \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow t_1 &= \left(\frac{120 \cdot 60 \cdot 90 \cdot 60}{90 \cdot 60 - 120 \cdot 60} \right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{3135}{120 \cdot 60} \right) \Rightarrow \boxed{t_1 = 4005 \text{ s}}
 \end{aligned}$$

Entonces el valor de t_2 es:

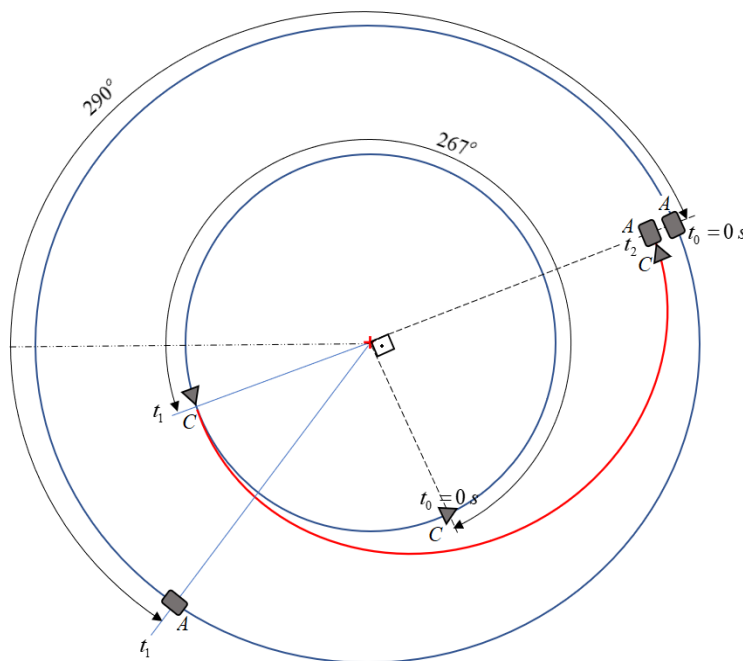
$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow 3135 = t_2 - 4005 \Rightarrow t_2 = 7140 \text{ s}$$

b) En el instante $t_1 = 4005 \text{ s}$, la posición angular desde C y A desde la misma referencia utilizada en el punto a es:

$$\varphi_C = \omega_C \cdot t_1 = \frac{2\pi}{P_C} \cdot t_1 \Rightarrow \varphi_C = \frac{2\pi}{90.60} \cdot 4005 = 4.65 \text{ rad} \Rightarrow \varphi_C = 267^\circ$$

$$\varphi_A = \omega_A \cdot t_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{P_A} \cdot t_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_A = \frac{2\pi}{120.60} \cdot 4005 + \frac{\pi}{2} = 5.06 \text{ rad} \Rightarrow \varphi_A = 290^\circ$$

Por lo tanto, una representación más precisa de la maniobra es:



Pregunta 4:

a) De la ecuación de Pogson, tenemos que la magnitud absoluta de la estrella es:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow 0.42 - M = 5 \log \left(\frac{160}{3.26} \right) - 5 \Rightarrow M = -3.03$$

Conociendo la magnitud absoluta del Sol $M_S = 4.8$, de la ecuación general de magnitudes se obtiene:

$$M - M_S = -2.5 \cdot \log \left(\frac{L}{L_S} \right) \Rightarrow -3.03 - 4.8 = -2.5 \cdot \log \left(\frac{L}{L_S} \right) \Rightarrow \frac{L}{L_S} = 1355.2$$

b) De la relación masa-luminosidad para una estrella de secuencia principal, tenemos:

$$\frac{L}{L_S} = \left(\frac{M}{M_S} \right)^{3,5} \Rightarrow \frac{M}{M_S} = \sqrt[3,5]{1355,2} \Rightarrow \frac{M}{M_S} = 7,85$$

c) De la ecuación de Ballesteros, y sabiendo que el índice BV de la estrella es igual a $-0,09$, tenemos que la temperatura de la estrella es:

$$T = 4600 K \left(\frac{1}{0,92.(B-V)+1,7} + \frac{1}{0,92.(B-V)+0,62} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 4600 K \left(\frac{1}{0,92.(-0,09)+1,7} + \frac{1}{0,92.(-0,09)+0,62} \right) \Rightarrow T = 11407 K$$

Conociendo la temperatura del Sol, $T_S = 5800 K$, de la ecuación de Stefan-Boltzmann surge que la relación de los rayos es:

$$\frac{L}{L_S} = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4} \Rightarrow \frac{L}{L_S} = \left(\frac{R}{R_S} \right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_S} \right)^4 \Rightarrow 1355,2 = \left(\frac{R}{R_S} \right)^2 \cdot \left(\frac{11407}{5800} \right)^4 \Rightarrow \frac{R}{R_S} = 9,52$$

d) De la 3ra Ley de Kepler, tenemos que la distancia r entre la estrella y el exoplaneta es:

$$\frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow \frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot 7,85 M_S} \Rightarrow \frac{P(\text{ano})^2}{r(\text{ua})^3} = \frac{1}{7,85} \Rightarrow \frac{(100/365)^2}{r^3} = \frac{1}{7,85} \Rightarrow r = 0,838 \text{ ua} = 1,257 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

El flujo luminoso de la estrella (F) a distancia r , es:

$$F = \frac{L}{4\pi \cdot r^2} = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot r^2} \Rightarrow F = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{r^2}$$

Por lo tanto, la potencia recibida (P_R) por el radio exoplaneta R_e es:

$$F = \frac{P_R}{\pi \cdot R_e^2} \Rightarrow F = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{r^2} = \frac{P_R}{\pi \cdot R_e^2} \Rightarrow P_R = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot R_e^2}{r^2}$$

Considerando que el albedo del exoplaneta es cero, es decir, se comporta como un cuerpo negro ideal ($= 1$), tenemos que en equilibrio térmico la potencia recibida es igual a la potencia emitida (P_E). Por lo tanto, la temperatura de equilibrio térmico del T_e exoplaneta es:

$$\left| \begin{array}{l} P_E = \varepsilon 4\pi R_e^2 \sigma T_e^4 \\ P_R = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot R_e^2}{r^2} \end{array} \right. \Rightarrow \varepsilon 4\pi R_e^2 \sigma T_e^4 = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot R_e^2}{r^2} \Rightarrow T_e = T \cdot \sqrt{\frac{R}{2r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_e = 11407 \cdot \sqrt{\frac{9,52 \cdot 7 \cdot 10^8}{2 \cdot 1,257 \cdot 10^{11}}} \Rightarrow T_e = 1857 K$$