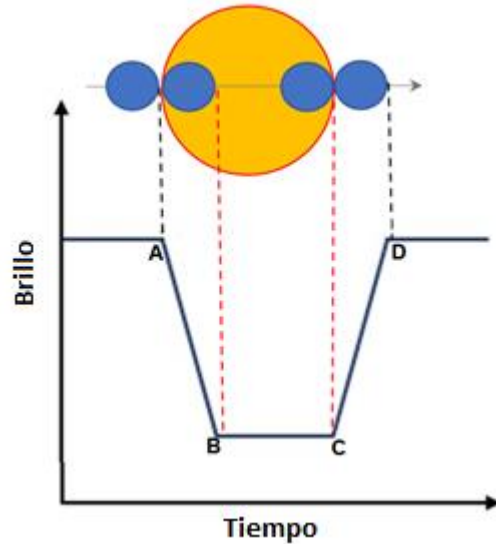


Prueba Teórica en Grupo – Soluciones

1) a) sea R el radio de TRAPPIST-1 y r el radio de TRAPPIST-1g, considerando que la velocidad tangencial de TRAPPIST-1g es constante y su plano orbital es paralelo a la línea de visión, tenemos:



$$\begin{cases} d_{AD} = v \cdot t_{AD} \\ d_{BC} = v \cdot t_{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(R+r) = v \cdot t_{AD} \\ 2(R-r) = v \cdot t_{BC} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{v \cdot (t_{AD} + t_{BC})}{4} \text{ e } r = \frac{v \cdot (t_{AD} - t_{BC})}{4}$$

Luego:

$$R = \frac{4,15 \cdot 10^4 (1,19 + 0,99) \cdot 3600}{4} \Rightarrow R = 8,14 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$r = \frac{4,15 \cdot 10^4 (1,19 - 0,99) \cdot 3600}{4} \Rightarrow r = 7,47 \cdot 10^6 \text{ m}$$

b) De la ecuación general de magnitudes, tenemos que el flujo F_1 de TRAPPIST-1 es:

$$m_1 - m_{Sol} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_{Sol}}\right) \Rightarrow 13,43 - (-26,72) = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{1366}\right) \Rightarrow F_1 = 1,18 \cdot 10^{-13} \frac{W}{m^2}$$

Sabiendo que TRAPPIST-1 está en $d = 12$ pc, a partir de la definición de flujo y la ecuación de Stefan-Boltzmann, obtenemos:

$$\begin{cases} F_1 = \frac{L}{4\pi d^2} \\ L = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \Rightarrow F_1 = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{d^2} \Rightarrow 1,18 \cdot 10^{-13} = \frac{(8,142 \cdot 10^7)^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot T^4}{(12,3086 \cdot 10^{16})^2} \Rightarrow T = 2560 \text{ K}$$

c) Considerando la situación de magnitud m_1 (TRAPPIST-1 no eclipsado por ningún planeta) y la situación de magnitud m_2 (TRAPPIST-1 eclipsado por un planeta de radio r); como el sistema está siempre a la misma distancia d de la Tierra, de la ecuación general de magnitudes se obtiene:



$$\begin{aligned}
 m_1 - m_2 &= -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{L_1}{4\pi d^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_2}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow m_1 - m_2 &= -2,5 \cdot \log\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 - 4\pi r^2 \cdot \sigma \cdot T^4}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow m_1 - m_2 &= -2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) \Rightarrow \boxed{m_2 = m_1 + 2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right)}
 \end{aligned}$$

d) Usando los datos del exoplaneta TRAPPIST-1e, tenemos que la masa de TRAPPIST-1 es:

$$M_{\text{TRAPPIST-1}} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{P^2} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \cdot \frac{(0,028 \cdot 1,5 \cdot 10^{11})^3}{(6,09 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \Rightarrow \boxed{M_{\text{TRAPPIST-1}} = 1,58 \cdot 10^{29} \text{ kg}}$$

Aplicando la 3ra Ley de Kepler , obtenemos $\left(\frac{P_1^2}{a_1^3} = \frac{P_2^2}{a_2^3}\right)$:

Planeta	Período (días)	Radio orbital (Au)
1b	1.51	0.011
1c	2.38	0.015
1d	4.04	0.021
1 e	6.09	0.028
1f	9.20	0.037
1g	12.35	0.045
1h	18.60	0.059

e) La potencia recibida (P_R) por un exoplaneta, de TRAPPIST-1 de luminosidad $L_{estrella}$, a distancia d , viene dada

$$\left| \begin{array}{l} I = \frac{P_R}{\pi R_p^2} \\ \text{por: } I = (1-a) \cdot I_0 \Rightarrow P_R = I_0 \cdot (1-a) \cdot \pi R_p^2 \\ I_0 = \frac{L_{estrella}}{4\pi \cdot d^2} \end{array} \right.$$

donde I es la incidencia luminosa y a se llama albedo.

Nota: Albedo (del latín *abus* “blancura”) es el poder reflectante de una superficie. Se puede obtener por la relación entre la radiación reflejada y la radiación incidente.

La potencia emitida (P_E) por el exoplaneta se expresa por:

$$P_E = \varepsilon 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4$$

Donde ε es la emisividad que para un cuerpo negro tiene valor 1.

En equilibrio térmico $P_R = P_E$, entonces:

$$\varepsilon 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4 = I_0 \cdot (1-a) \cdot \pi R_p^2 \Rightarrow 4 \cdot \sigma T_p^4 = \frac{L_{estrella}}{4\pi \cdot d^2} \cdot (1-a) \Rightarrow 4 \cdot \sigma T_p^4 = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot d^2} \cdot (1-a)$$

$$d = \sqrt{\frac{R^2 \cdot T^4 \cdot (1-a)}{4 \cdot T_p^4}} = \frac{R \cdot T^2 \cdot \sqrt{1-a}}{2 \cdot T_p^2} \Rightarrow d = \left(\frac{T}{T_p} \right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1-a}}{2}$$

Para encontrar los límites de la zona habitable debemos tener un planeta cuya temperatura permita la presencia de agua líquida, entonces $273 \text{ K} \leq T_p \leq 373 \text{ K}$. Sabiendo que la temperatura de TRAPPIST-1 es $T = 2560 \text{ K}$, tenemos:

$$d_{\min} = \left(\frac{T}{T_{p_{\max}}} \right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1-a}}{2} = \left(\frac{2560}{373} \right)^2 \cdot \frac{8,142 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{1-0,1}}{2} \Rightarrow d_{\min} = 1,819 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,012 \text{ ua}$$

$$d_{\max} = \left(\frac{T}{T_{p_{\min}}} \right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1-a}}{2} = \left(\frac{2560}{273} \right)^2 \cdot \frac{8,142 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{1-0,1}}{2} \Rightarrow d_{\max} = 3,396 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,023 \text{ ua}$$

Por lo tanto, los exoplanetas dentro de la zona habitable son TRAPPIST-1 **c** y TRAPPIST-1 **d**.

f) Considerando que en el primer tramo del viaje la micronave se mueve con aceleración constante (MRUV) y en el segundo tramo se mantiene con velocidad constante (MRU), tenemos:

- Sección 1:

$$v = v_0 + a \cdot t_1 \Rightarrow 0,2 \cdot c = 35 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{0,2c}{35} = 1,714 \cdot 10^6 \text{ s}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot d_1 \Rightarrow (0,2 \cdot c)^2 = 2 \cdot 35 \cdot d_1 \Rightarrow d_1 = \frac{4 \cdot 10^{-2} \cdot c^2}{70} = 5,142 \cdot 10^{13} \text{ m}$$

- Sección 2:

$$d_2 = v \cdot t_2 \Rightarrow 12,3086 \cdot 10^{16} - d_1 = 0,2c \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = 6,159 \cdot 10^9 \text{ s}$$

Entonces el tiempo total de viaje es:

$$t = t_1 + t_2 = 1,714 \cdot 10^6 + 6,159 \cdot 10^9 \approx 195 \text{ años}$$

2) a) Analizando la Figura 1, tenemos que la altura h del Sol es:

$$\operatorname{tg} h = \frac{23}{22} \Rightarrow h = 46,27^\circ$$

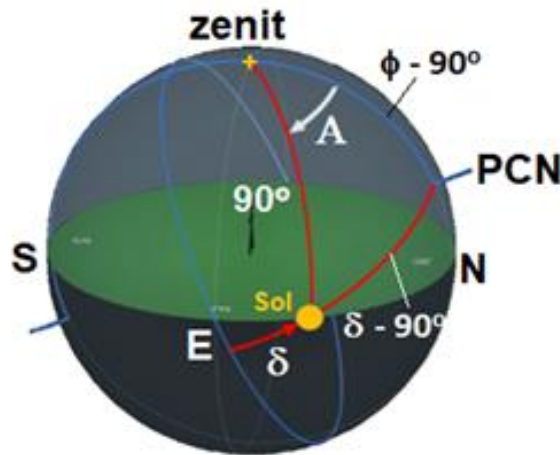
Considerando que la declinación del Sol el 21 de diciembre es $\delta = -23.45^\circ$, la latitud ϕ de Chichén Itzá es:

$$|\phi| + |\delta| + h = 90^\circ \Rightarrow |\phi| = 90^\circ - 23,45^\circ - 46,27^\circ \Rightarrow |\phi| = 20,73^\circ \text{ N}$$

b) Sabiendo que el azimut de la escalera Oeste es $A_{EW} = 290^\circ$, Figura 2, tenemos:

$$A_{EW} - 270^\circ = \theta \Rightarrow \theta = 290^\circ - 270^\circ \Rightarrow \theta = 20^\circ$$

c) Si el Sol hace paso cenital en Tinum el 23 de mayo, su declinación, en esta fecha, es igual a la latitud local, es decir, $\delta = \phi = 20,73^\circ$. Para el amanecer, el azimut A estará dado por:



$$\begin{aligned} \cos(\delta - 90^\circ) &= \cos(\phi - 90^\circ) \cos 90^\circ + \sin(\phi - 90^\circ) \sin 90^\circ \cos A \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin \delta &= \cos \phi \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\sin \delta}{\cos \phi} \Rightarrow \cos A = \frac{\sin \delta}{\cos \phi} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos A &= \operatorname{tg} 20,73^\circ \Rightarrow A = 67,76^\circ \end{aligned}$$

En cuanto a la puesta de sol, con azimut A' , tenemos:

$$\cos(360^\circ - A') = \operatorname{tg} 20,73^\circ \Rightarrow A' = 292,24^\circ$$

d) La distancia máxima y mínima entre el planeta Tierra y Venus es:

$$d_{\text{máx}} = 1 \text{ ua} + 0,72 \text{ ua} = 1,72 \text{ ua} \Rightarrow d_{\text{máx}} = 2,58 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$d_{\text{mín}} = 1 \text{ ua} - 0,72 \text{ ua} = 0,28 \text{ ua} \Rightarrow d_{\text{mín}} = 4,20 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

Considerando el diámetro de Venus $2 \cdot r = 1,21 \times 10^7 \text{ m}$, tenemos:

$$\text{tg } \theta_{\text{máx}} = \frac{1,21 \cdot 10^7 \text{ m}}{4,20 \cdot 10^{10} \text{ m}} \Rightarrow \theta_{\text{máx}} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \Rightarrow \theta_{\text{máx}} = 59,42''$$

$$\text{tg } \theta_{\text{mín}} = \frac{1,21 \cdot 10^7 \text{ m}}{2,58 \cdot 10^{11} \text{ m}} \Rightarrow \theta_{\text{mín}} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \Rightarrow \theta_{\text{mín}} = 9,67''$$

e) En la culminación superior, el ángulo horario tiene un valor de cero ($H = 0$). Por lo tanto, la ascensión recta del cúmulo es:

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow \alpha = 3h47 \text{ min}$$

El ángulo horario H' del cúmulo, en este instante, en *Greenwich*, es:

$$\begin{aligned} T_{SL} &= T_{SG} + \lambda \\ T_{SG} &= H' + \alpha \Rightarrow T_{SL} = H' + \alpha + \lambda \Rightarrow 3h47 \text{ min} = H' + 3h47 \text{ min} - 5h54 \text{ min } 42s \Rightarrow \\ \lambda &= -88^\circ 34' = -5h54 \text{ min } 42s \\ &\Rightarrow H' = 5h54 \text{ min } 42s \end{aligned}$$

De las relaciones presentadas en el comunicado tenemos que 13 winales y 18 parientes equivale a 278 días. Fijando el tiempo de observación, sabemos que por día el ángulo horario aumenta unos 4 min (1°) hacia el Oeste ($360^\circ/365$ días). Por tanto, al cabo de 278 días la variación del ángulo horario (ΔH) será:

$$\Delta H = \frac{360^\circ}{365 \text{ días}} \cdot 278 \text{ días} \cdot \frac{1h}{15^\circ} \Rightarrow \Delta H = 18h16 \text{ min } 46s$$

Por tanto, el nuevo ángulo horario (H'') de las Pléyades en *Greenwich* será:

$$H'' = H' + \Delta H = 5h54 \text{ min } 42s + 18h16 \text{ min } 46s \Rightarrow H'' = 11 \text{ min } 28s$$

f) La declinación de las Pléyades se puede calcular mediante:

$$\delta - \phi + h = 90^\circ \Rightarrow \delta - 20^\circ 43,8' + 83^\circ 36' = 90^\circ \Rightarrow \delta = 27^\circ 7' 36''$$

Para que una estrella sea circumpolar visible es necesario que $\delta + \phi > 90^\circ$. Como $\delta + \phi > 47^\circ 51' 24''$, tenemos que las Pléyades **no son** circumpolares visibles en Tulum.

g) Según las correspondencias dadas, un baktun corresponde a $20 \times 20 \times 18 \times 20 = 144000$ kine. Entonces, el período maya más largo se compone de $13 \times 144000 \text{ kine} = 1\,872\,000 \text{ kine}$. Como $1 \text{ kin} = 1 \text{ día}$, el período maya más largo es de 5128 años y 280 días.

Por lo tanto, la fecha de inicio del último gran período maya es cerca del 16 de marzo de **3116 a.C.**

2) a) Densidad numérica n , corresponde al número de objetos N especificados por unidad de volumen V , así:

$$n = \frac{N}{V} \Rightarrow N = n.V$$

- Para $r < R_b$, la masa del sistema $M(r)$ varía con la distancia r , tal que:

$$\left| \begin{array}{l} M(r) = N.m \\ N = n \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow M(r) = \frac{4}{3} \pi n.m.r^3 \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta que las estrellas masivas m están en órbitas circulares dentro del bulto galáctico, se trata de:

$$\left| \begin{array}{l} F_G(r) = R_{CP} \\ F_G(r) = \frac{GM(r).m}{r^2} \Rightarrow \frac{GM(r).m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi n.m.r^3.m = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = r \sqrt{\frac{4\pi Gnm}{3}} \\ R_{CP} = \frac{mv^2}{r} \end{array} \right.$$

- Para $r \geq R_b$, la masa total M_T del sistema permanece constante, ya que se deben despreciar las estrellas del halo, por lo que:

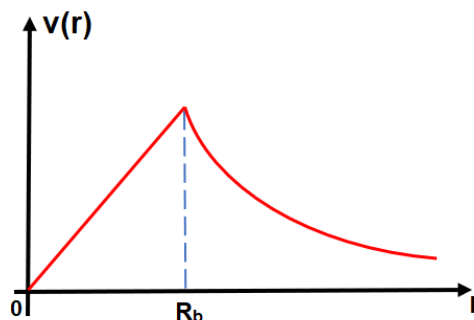
$$\left| \begin{array}{l} M_T = N.m \\ N = n \cdot \frac{4}{3} \pi R_b^3 \Rightarrow M_T = \frac{4}{3} \pi n.m.R_b^3 \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta que las estrellas masivas m están en órbitas circulares dentro del bulto galáctico, se trata de:

$$\left| \begin{array}{l} F_G = R_{CP} \\ F_G = \frac{GM_T.m}{r^2} \Rightarrow \frac{GM_T.m}{r^2} = \frac{mv'^2}{r} \Rightarrow \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi n.m.R_b^3.m = \frac{mv'^2}{r} \Rightarrow v' = \sqrt{\frac{4\pi GnmR_b^3}{3r}} \\ R_{CP} = \frac{mv'^2}{r} \end{array} \right.$$

b) Sabiendo que G , n , m y R_b , son constantes, para $r < R_b$ tenemos $v \propto r$; Es para $r \geq R_b$ es válido $v' \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$,

entonces:

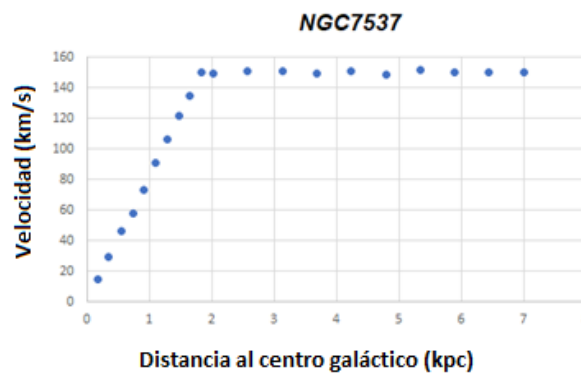


c) Dado que N el número de estrellas en la galaxia NGC7537, entonces como las estrellas son similares al Sol, la luminosidad de la galaxia será $N \cdot L_{Sol}$. De la ecuación fundamental de magnitudes, se obtiene:

$$m - m_{Sol} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F}{F_{Sol}}\right) \Rightarrow m - m_{Sol} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{N \cdot L_{Sol}}{4\pi D^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_{Sol}}\right) \Rightarrow m - m_{Sol} = -2,5 \log\left(N \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15,7 - (-26,72) = -2,5 \log\left(N \cdot \left(\frac{1,5 \cdot 10^{11}}{38 \cdot 10^6 \cdot 3,086 \cdot 10^{16}}\right)^2\right) \Rightarrow N = 6,5 \cdot 10^8 \text{ estrellas}$$

d) La distancia x de las estrellas desde el centro de la galaxia NGC7537 viene dado por: $x = 38 \times 10^6 \cdot \text{tg}(\theta/2)$, donde θ es el diámetro angular de sus órbitas. Con los datos de la Tabla 1 viene:



Diámetro angular (")	v (km/s)	Distancia (kpc)
2	14.32	0.184
4	29.48	0.349
6	46.06	0.553
8	58.04	0.737
10	73.5	0.921
12	91.1	1.105
14	106.76	1,289
16	121.48	1,474
18	134.86	1.658
20	150.14	1,842
22	149.72	2,026
28	150.72	2,579
34	151.14	3.132
40	149.2	3,684
46	151.22	4,237
52	148.62	4,790
58	151.68	5,343
64	150.28	5,895
70	150.28	6,448
76	150.62	7,000

e) Analizando la gráfica, la velocidad de las estrellas aumenta linealmente con la distancia desde el centro de la galaxia hasta una distancia R_b , y a partir de este punto permanece constante, por lo que:

- Para $r < R_b$:

$$v = 82,3 \cdot r$$

- Para $r \geq R_{\text{segundo}}$:

$$v' = 150,1 \text{ km/s}$$

f) De la gráfica del punto **(d)** tenemos que el radio del abombamiento es del orden de $R_b \approx 1.842 \text{ kpc}$. Teniendo en cuenta que las estrellas de masa m están en órbitas circulares dentro del bulbo, se puede estimar que la masa del bulbo de NGC7537 es:

$$\left| \begin{aligned} F_G &= R_{CP} \\ F_G &= \frac{GM'_T \cdot m}{R_b^2} \Rightarrow \frac{GM'_T \cdot m}{R_b^2} = \frac{mv'^2}{R_b} \Rightarrow M'_T = \frac{v'^2 \cdot R_b}{G} = \frac{(150,07 \cdot 10^3)^2 \cdot (1,842 \cdot 10^3 \cdot 3,086 \cdot 10^{16})}{6,67 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow \\ R_{CP} &= \frac{mv'^2}{R_b} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow M'_T = 1,919 \cdot 10^{40} \text{ kg} \Rightarrow M'_T = 9,65 \cdot 10^9 M_{\text{Sol}}$$

g) Para $r > R_b$, tenemos que la cantidad de materia en función de la distancia viene dada por:

$$v(r) = \sqrt{\frac{G \cdot M(r)}{r}} \Rightarrow M(r) = \frac{r \cdot v(r)^2}{G}$$

A partir del perfil de densidad esférica de la materia oscura, la cantidad de materia en función de la distancia debería comportarse como:

$$M(r) = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho(r) = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha$$

Entonces, para $r > R_b$, la velocidad en función de la distancia se puede escribir como:

$$\frac{r \cdot v(r)^2}{G} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha$$

Si queremos obtener una gráfica como en el punto **(d)**, en la que la velocidad es independiente de la distancia, del análisis dimensional de la ecuación anterior tenemos que el exponente α debe ser:

$$1 = 3 + \alpha \Rightarrow \alpha = -2$$

h) Si $a \ll a_0 \Rightarrow \frac{a}{a_0} \ll 1$; Luego $\mu = \frac{a}{a_0}$. Reescribiendo la 2da Ley de Newton, tenemos que la velocidad de rotación de las estrellas en el halo galáctico viene dada por:

$$\begin{aligned}
 F &= m \cdot a \cdot \frac{a}{a_0} \\
 a &= \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{GM_T \cdot m}{r^2} = \frac{m}{a_0} \cdot \left(\frac{v^2}{r} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt[4]{GM_T a_0} \\
 F_G &= \frac{GM_T \cdot m}{r^2} \\
 F &= F_G
 \end{aligned}$$

Dado que G , M_T y a_0 son constantes, la velocidad de rotación de las estrellas en el halo galáctico también será constante.