

Prueba Teórica Grupal - Soluciones

1) a) Según el dibujo, se puede observar que la maniobra realizada es una órbita elíptica, siendo el punto A el periastro, el punto B el apoastro y el planeta M situado en uno de los focos. Esta elipse tiene como semieje mayor $a = 2R_0$ y distancia focal $c = R_0$. De esta forma, tenemos que su centro está en el punto D (ver figura abajo) y, como la trayectoria del barco en C y el segmento $\overline{AB}$ son paralelos, es posible determinar α usando los segmentos $\overline{CM}$ y $\overline{MD}$.

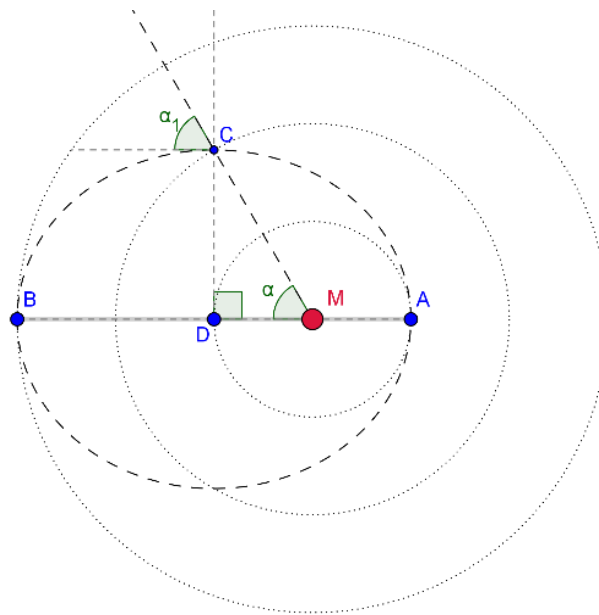
Como $\overline{CM} = 2R_0$ y $\overline{MD} = R_0$, tenemos $\cos \alpha = \frac{\overline{MD}}{\overline{CM}} = \frac{R_0}{2R_0} = \frac{1}{2} \therefore \alpha = 60^\circ$

b) Por la 3ª Ley de Kepler, tenemos una relación entre el periodo orbital (T) y el semieje mayor de la órbita ($a = 2R_0$), siendo M la masa del planeta.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot 8R_0^3}{GM} \Rightarrow T = 4\pi R_0 \sqrt{\frac{R_0}{GM}}$$

Como el tiempo para ir de A a B es la mitad del período orbital, tenemos:

$$t_{A \rightarrow B} = \frac{T}{2} = 2\pi R_0 \sqrt{\frac{R_0}{GM}}$$



2) a) Despejando V en la ecuación (3), tenemos la siguiente condición:

$$V = \frac{5,14 - T}{0,0042}$$

Aplicando la relación de velocidad en la ecuación (2), tenemos el siguiente polinomio:

$$P = 0,00052 \left[0,22 \cdot \left(\frac{5,14 - T}{0,0042} \right) + 340 \right]^2$$

Resolviendo el notable producto entre corchetes, llegamos a la siguiente aproximación cuadrática para la amplitud P :

$$P = 193,01 - 33,19 \cdot T + 2743,66 \cdot T^2$$

b) Aplicando esta relación en la expresión (1) y usando la ecuación (4), tenemos la siguiente resolución:

$$P = -2,846 + \left[\left(\frac{6,54}{\sqrt{2}} \right) \cdot (0,047 \cdot V + 0,644) \right] - \left[\left(\frac{0,118}{2} \right) \cdot (0,047 \cdot V + 0,644)^2 \right] - \left[\left(\frac{0,002}{2\sqrt{2}} \right) \cdot (0,047 \cdot V + 0,644)^3 \right]$$

Resolviendo todos los términos se llega al siguiente polinomio:

$$P = 0,1073 + 0,2134 \cdot V - 1,333 \cdot 10^{-4} \cdot V^2 - 7,341 \cdot 10^{-8} \cdot V^3$$

c) El mejor caso es cuando la eyección de masa coronal es lenta ($V = 300$ km/s), ya que es posible detectarla con mucha anticipación, tomando así medidas preventivas. En el peor de los casos, la velocidad de eyección es lo más alta posible ($V = 800$ km/s). Usando la relación (3), tenemos el siguiente intervalo de tiempo para que la tormenta llegue a la Tierra:

$$\begin{cases} T_{300} = -0,0042 \cdot 300 + 5,14 \\ T_{800} = -0,0042 \cdot 800 + 5,14 \end{cases} = \begin{cases} T_{300} = 3,88 \text{ días (mejor caso)} \\ T_{800} = 1,78 \text{ días (peor caso)} \end{cases}$$

d) Si la perturbación tuviera un valor de 850 nT, cuando aplicamos este dato a la relación calculada en el punto a, obtenemos el tiempo de tránsito (T):

$$850 = 193,01 - 33,19 \cdot T + 2743,66 \cdot T^2 \Rightarrow 2743,66 \cdot T^2 - 33,19 \cdot T - 656,99 = 0$$

Es una ecuación de segundo grado. Para obtener el tiempo de tránsito, calcule las raíces positivas de esta ecuación. De esta forma tenemos $T = 0,4954$ días , lo que implica que la tormenta de 1859 ocurrió unas 12 horas antes de su llegada a la Tierra.

e) Para este caso, podemos utilizar la relación obtenida en el inciso b, que vincula la amplitud de la perturbación de la CME con la velocidad de la CME (V):

$$P = 0,1073 + 0,2134 \cdot V - 1,333 \cdot 10^{-4} \cdot V^2 - 7,341 \cdot 10^{-8} \cdot V^3$$

Sin embargo, los índices vinculados a los términos cuadráticos y cúbicos son muy bajos. De esta forma, podemos despreciar los dos últimos términos del polinomio, que establece una relación lineal entre P y V:

$$P = 0,1073 + 0,2134 \cdot V$$

Si $P = 850$ nT, tenemos la siguiente estimación para V: $V = 3982$ km/s.

3) a) este hecho se puede afirmar al analizar los espectros de las regiones POS5 y POS6. En las dos bandas espectrales analizadas, se observa que las regiones presentan líneas de emisión con el mismo patrón respecto al POS4 adoptado como resto ya que se encuentra en el centro del disco. En el caso de la región POS5, las líneas se mueven hacia el rango rojo del espectro, indicando que este punto se está alejando de nosotros. En el caso de POS6, las líneas se desplazan hacia el azul, lo que indica que esta región se nos acerca.

b) Adoptando la distancia de M87 como $d = 16 \text{ Mpc}$, podemos tener la distancia de las posiciones medidas con relación a la región central. Usando la escala adoptada en la imagen, se puede ver que las regiones POS5 y POS6 tienen una distancia angular $\alpha = 0,25''$ de arco. De esta forma, usando la relación de tamaño angular, tenemos:

$$D \cdot \alpha = D \Rightarrow 16 \text{ Mpc} \cdot \left[0,25'' \cdot \left(\frac{1^\circ}{3600''} \right) \cdot \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right) \right] = D \quad \therefore D = 1,94 \cdot 10^{-5} \text{ Mpc}$$

c) Observando líneas de perfiles similares, tenemos que $\Delta\lambda = 20\text{\AA} = 2 \text{ nm}$.

d) Si las líneas entre POS5 y POS6 están desplazadas $20\text{\AA}$, y estos puntos giran alrededor de POS4, podemos decir que el desplazamiento Doppler, para cada una de las posiciones en movimiento, es de $10 \text{ \AA}$. Esto se puede corroborar con el espectro de POS4, cuyas líneas de emisión se encuentran entre las líneas desplazadas de POS5 y POS6. De esta forma, usando la razón del Efecto Doppler y una línea de referencia POS4 (en este caso se usó $\lambda = 5030 \text{ \AA}$), tenemos:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{10}{5030} = \frac{v}{3 \cdot 10^5} \quad \therefore v = 5,964 \cdot 10^2 \text{ km/s}$$

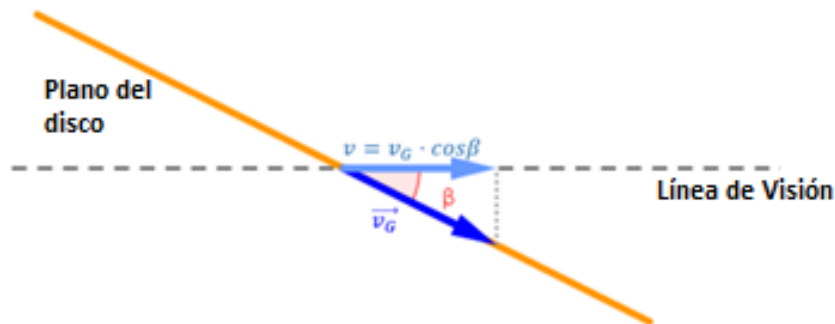
e) Suponiendo que la magnitud de la fuerza gravitatoria de POS4 aplicada sobre un objeto de masa m en POS5 o POS6 (que están a una distancia r de la masa del agujero negro M) es igual a la magnitud de la fuerza centrípeta, tenemos la siguiente relación:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow M = \frac{rv^2}{G}$$

Dado que $r = 1,94 \cdot 10^{-5} \text{ Mpc} = 5,986 \cdot 10^{17} \text{ m}$, $v = 5,964 \cdot 10^5 \text{ m/s}$, aplicándolo a la relación encontrada, tenemos:

$$M = 5,986 \cdot 10^{17} \cdot \frac{(5,964 \cdot 10^5)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \quad \therefore M = 3,192 \cdot 10^{39} \text{ kg} = 1,604 \cdot 10^9 M_\odot$$

f) Si el disco tiene una inclinación de 35° con respecto a la línea de visión, la velocidad observada sería solo una componente de la velocidad de rotación original (v_G) del punto, como se puede ver en la siguiente figura:



$$\text{Y como } v = v_G \cdot \cos 35^\circ \Rightarrow v_G = \frac{v}{\cos 35^\circ} = \frac{596,4}{\cos 35^\circ} \therefore v_G = 728,1 \text{ km/s}$$

Aplicando este nuevo valor en el ítem anterior, tenemos que la masa M del agujero negro es:

$$M = 5,986 \cdot 10^{17} \cdot \frac{(7,281 \cdot 10^5)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \therefore M = 4,758 \cdot 10^{39} \text{ kg} = 2,391 \cdot 10^9 M_\odot$$

Es decir, estaríamos **errando por menos** en la masa estimada del elemento anterior.

g) Hay dos posibilidades para resolver este problema: admitir que el disco no está inclinado o admitir que hay una inclinación de 35° , como se mencionó en el punto anterior.

La magnitud absoluta M_G se puede determinar comparándola con la magnitud absoluta del Sol ($M_\odot = +4,83$). De la relación entre flujo y magnitud, tenemos:

$$M_G - M_\odot = -2,5 \cdot \log \frac{F_G}{F_\odot}$$

Para la primera situación, sin pendiente, tenemos:

$$M_G - 4,83 = -2,5 \cdot \log \left(\frac{1,604 \cdot 10^9 F_\odot}{F_\odot} \right) \therefore \boxed{M_G = -18,18}$$

Y la magnitud aparente (m_G), se puede obtener por el módulo de distancia, donde d_{pc} la distancia desde M87 en parsecs.

$$m_G - M_G = 5 \cdot \log d_{pc} - 5 \Rightarrow m = -18,18 + 5 \cdot \log(16 \cdot 10^6) - 5 \therefore \boxed{m_G = +12,84}$$

Para la segunda situación, inclinación de 35° , tenemos:

$$M_G - 4,83 = -2,5 \cdot \log \left(\frac{2,391 \cdot 10^9 F_\odot}{F_\odot} \right) \therefore \boxed{M_G = -18,62}$$

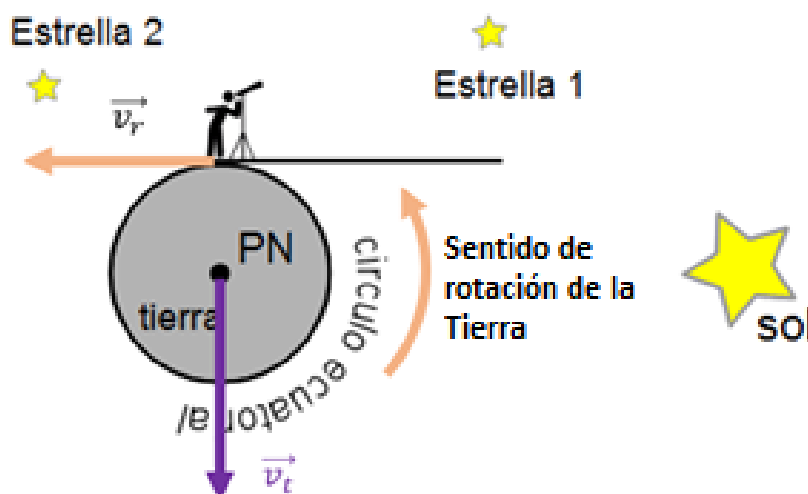
Y, para la magnitud aparente:

$$m = -18,62 + 5 \cdot \log(16 \cdot 10^6) - 5 \therefore \boxed{m_G = +12,40}$$

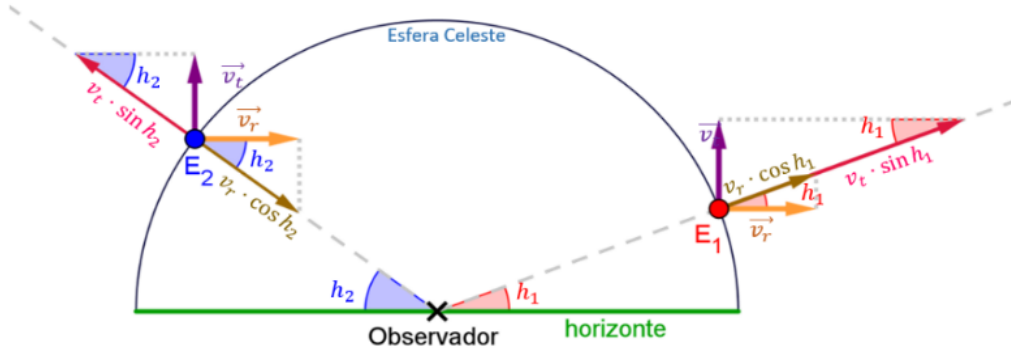
4) a) El efecto Doppler hará que las líneas observadas se desplacen. Existen otros mecanismos que pueden afectar la luz observada (como la Dispersión de Rayleigh y la refracción atmosférica), pero en estos casos la luz emitida puede ser desviada o absorbida o dispersada.

b) El observador tiene un movimiento, compuesto por los movimientos de rotación del planeta y su traslación alrededor del Sol.

c) La siguiente figura muestra los vectores de movimiento responsables de los efectos Doppler.



- d) La siguiente figura muestra cómo el observador detecta, según su línea de visión, los movimientos de las estrellas E_1 y E_2 . A partir de los datos de azimuth, sabemos que estas estrellas están en el meridiano local del observador, en direcciones opuestas del cielo.



Tomando como referencia al observador en reposo, tenemos que los movimientos de rotación y traslación (vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_t$, respectivamente) presentan vectores de sentidos opuestos. Sin embargo, en la línea de visión del observador (líneas discontinuas), sólo percibirá las componentes de estos movimientos según la altura de cada estrella (h_1 y h_2). De esta forma, el vector velocidad observado para E_1 y E_2 será:

$$\begin{cases} \text{Estrella 1: } \vec{v}_1 = v_r \cdot \cos h_1 \hat{i} + v_t \cdot \sin h_1 \hat{j} \\ \text{Estrella 2: } \vec{v}_2 = v_r \cdot \cos h_2 \hat{i} - v_t \cdot \sin h_2 \hat{j} \end{cases}$$

Dado que la magnitud de un vector es $v = \sqrt{(v_i)^2 + (v_j)^2}$, las fórmulas de desplazamiento Doppler se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} = \frac{v_1}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_1)^2 + (v_t \cdot \sin h_1)^2}}{c} \\ \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} = \frac{v_2}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_2)^2 + (v_t \cdot \sin h_2)^2}}{c} \end{cases}$$

- e) De la tabla del ítem anterior, tenemos los valores $\Delta\lambda_1$ para h_2 , $\Delta\lambda_2$ y h_1 . Tomando como referencia la línea H α (656,3 nm) se puede resolver el sistema de ecuaciones del punto anterior. Pronto:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} = \frac{v_1}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_1)^2 + (v_t \cdot \sin h_1)^2}}{c} \\ \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} = \frac{v_2}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_2)^2 + (v_t \cdot \sin h_2)^2}}{c} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{0,03840}{656,3} \cdot 3 \cdot 10^5 \right)^2 = (v_r \cdot \cos 35^\circ 10')^2 + (v_t \cdot \sin 35^\circ 10')^2 \\ \left(\frac{0,05291}{656,3} \cdot 3 \cdot 10^5 \right)^2 = (v_r \cdot \cos 55^\circ 7')^2 + (v_t \cdot \sin 55^\circ 7')^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego de algunos cálculos, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, el cual tomará las soluciones de v_r y v_t :

$$\begin{cases} 308,1 = v_r^2 \cdot 0,6683 + v_t^2 \cdot 0,3317 \\ 584,9 = v_r^2 \cdot 0,3271 + v_t^2 \cdot 0,6729 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} v_r = 6,247 \text{ km/s} \\ v_t = 29,16 \text{ km/s} \end{matrix}}$$

f) Tomando el día sideral como 23h 56min 4s ($\approx 8,616 \cdot 10^3$ s) y el año sideral como 365 días 6h 9min 10s ($\approx 3,156 \cdot 10^7$ s), para calcular la distancia Tierra-Sol, podemos obtenerla a partir de la velocidad media. Sea d_{TS} la distancia media entre la Tierra y el Sol:

$$v_t = \frac{2\pi \cdot d_{TS}}{\Delta t} \Rightarrow d_{TS} = \frac{v_t \cdot \Delta t}{2\pi} = \frac{29,16 \cdot 3,156 \cdot 10^7}{2\pi} \therefore \boxed{d_{TS} = 1,465 \times 10^8 \text{ km}}$$

Para el radio de la Tierra, se considera v_r como la velocidad de rotación del planeta en el ecuador terrestre. Y, usando el mismo concepto que el cálculo anterior:

$$v_r = \frac{2\pi \cdot r_{Tierra}}{\Delta t} \Rightarrow r_{Tierra} = \frac{v_r \cdot \Delta t}{2\pi} = \frac{6,247 \cdot 8,616 \cdot 10^3}{2\pi} \therefore \boxed{r_{Tierra} = 8,566 \times 10^3 \text{ km}}$$

Nota: aunque el radio calculado es 2 000 km mayor que el radio de la Tierra (6 371 km), este método resulta razonable para determinar el radio del planeta.

g) Como la Tierra está sujeta a la fuerza de atracción gravitacional provocada por el Sol, queda atrapada en una órbita circular. Igualando la aceleración gravitacional con la aceleración centrípeta, tenemos:

$$\frac{GM_{\odot}}{d_{TS}^2} = \frac{v_t^2}{d_{TS}} \Rightarrow v_t^2 = \frac{GM}{d_{TS}} \Rightarrow M_{\odot} = \frac{d_{TS} v_t^2}{G} = \frac{1,465 \cdot 10^{11} \cdot (2,916 \cdot 10^4)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow$$

$$\therefore \boxed{M_{\odot} = 1,87 \cdot 10^{30} \text{ kg}}$$