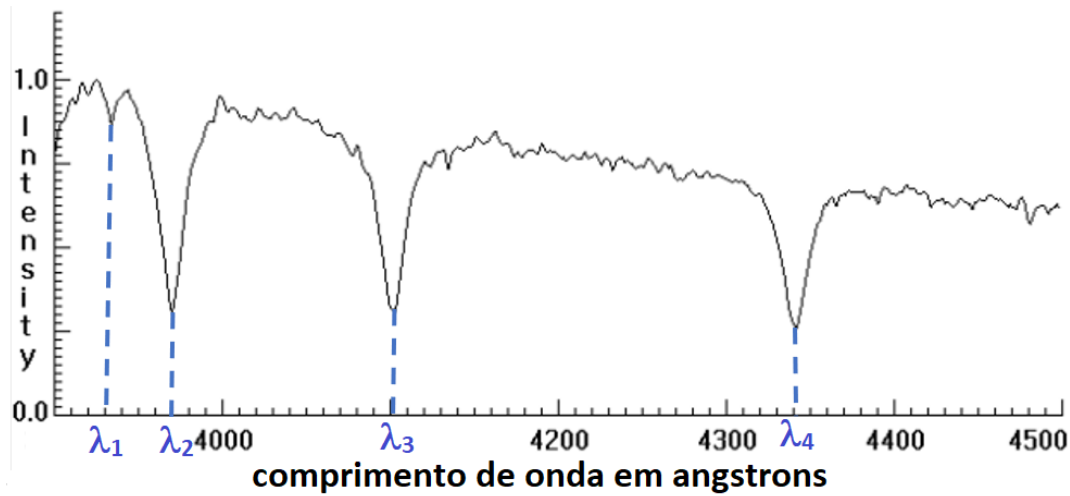


Prueba Teórica Grupal - Soluciones

1) un) Analizando los cuatro picos de absorción principales, tenemos:



$$\lambda_1 = 3930 \text{ \AA Ca II}$$

$$\lambda_2 = 3970 \text{ \AA HI (H épsilon)}$$

$$\lambda_3 = 4100 \text{ \AA He II}$$

$$\lambda_4 = 4340 \text{ \AA HI (H gamma)}$$

Concluimos que la estrella pertenece al tipo espectral **A**. La presencia de líneas de absorción de hidrógeno dominantes y metales débilmente ionizados refuerzan la justificación.

c) Analizando la gráfica, tenemos que la máxima intensidad ($I_{\max} = 1$) se da para la longitud de onda $\lambda_{\max} = 3920 \text{ \AA}$, por tanto, aplicando la Ley de Wien, tenemos:

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m.K} \Rightarrow 3920 \cdot 10^{-10} \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} \Rightarrow T = 7393 \text{ K}$$

d) Como la temperatura es baja para una estrella de clase espectral A ($\sim 11\,000 \text{ K}$ a $\sim 7500 \text{ K}$), podemos clasificarla como A10 = F0. Por lo tanto, su magnitud absoluta es $M = 2,6$. De la ecuación de Pogson tenemos:

$$m - M = 5 \log d - 5 = 9,5 - 2,6 = 5 \log d - 5 \Rightarrow d = 239,88 \text{ pc}$$

2)

a) Considerando que el radio orbital, suma del radio de la Tierra más la altura con relación a la superficie, se ha triplicado, la variación de la energía mecánica del satélite será:

$$\Delta E_{\text{mec}} = -\frac{GMm}{2r_f} + \frac{GMm}{2r_i} = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{3r_i} \right) \Rightarrow \Delta E_{\text{mec}} = \frac{GMm}{2} \cdot \frac{2}{3r_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E_{\text{mec}} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 3 \cdot 10^2}{3 \cdot (6,4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)} = 5,8 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) Como la masa del satélite es mucho menor que la masa de la Tierra, de la 3ª Ley de Kepler, tenemos:

$$\frac{P_i^2}{r_i^3} = \frac{P_f^2}{r_f^3} \Rightarrow \frac{P_i^2}{r_i^3} = \frac{P_f^2}{(3r_i)^3} \Rightarrow \frac{P_i}{P_f} = 0,19$$

c) Para salir de la órbita, es necesario que $\Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow K = -U$, entonces:

$$\frac{m \cdot v_{esp}^2}{2} = -\left(-\frac{GMm}{r}\right) \Rightarrow v_{esp} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{v_{esp\ i}^2}{v_{esp\ f}^2} = \frac{\frac{2GM}{r_i}}{\frac{2GM}{3r_i}} \Rightarrow \frac{v_{esp\ i}}{v_{esp\ f}} = \sqrt{3}$$

3) a) Considerando k y c constantes, de la definición de luminosidad, tenemos:

$$\left| \begin{array}{l} L = \frac{E}{t} \Rightarrow M^4 \propto \frac{kMc^2}{t} \Rightarrow t \propto M^{-3} \\ L \propto M^4 \end{array} \right.$$

b) Al duplicar la masa de la estrella, la relación t'/t , entre tiempos de vida será:

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{2M}{M}\right)^{-3} \Rightarrow \frac{t'}{t} = 0,125$$

Es decir, el tiempo de vida se reduce **8 veces**.

4) a) Siendo MM , la masa molar de la estrella, de la ecuación de estado para un gas ideal, tenemos:

$$p \cdot V = n \cdot k \cdot T \Rightarrow p \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{M}{MM} \cdot k \cdot T \Rightarrow pR^3 \propto MT$$

b) Considerando que el área superficial de la estrella es $A = 4\pi R^2$, de la definición de presión media, tenemos:

$$\left| \begin{array}{l} p = \frac{F}{A} \Rightarrow p \propto \frac{M^2}{R^2} \cdot \frac{1}{4\pi R^2} \Rightarrow p \propto \frac{M^2}{R^4} \\ F \propto \frac{M^2}{R^2} \end{array} \right.$$

c) Comparando los resultados de los puntos a y b, tenemos:

$$\left| \begin{array}{l} pR^3 \propto MT \\ p \propto \frac{M^2}{R^4} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{M^2}{R^4} \cdot R^3 \propto MT \Rightarrow T \propto \left(\frac{M}{R}\right)^1$$

Entonces la constante a de proporcionalidad es **$a = 1$** .

c) Considerando la densidad ρ de la estrella constante, tenemos:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow R^3 = \frac{3M}{4\pi\rho} \Rightarrow R \propto M^{\frac{1}{3}}$$

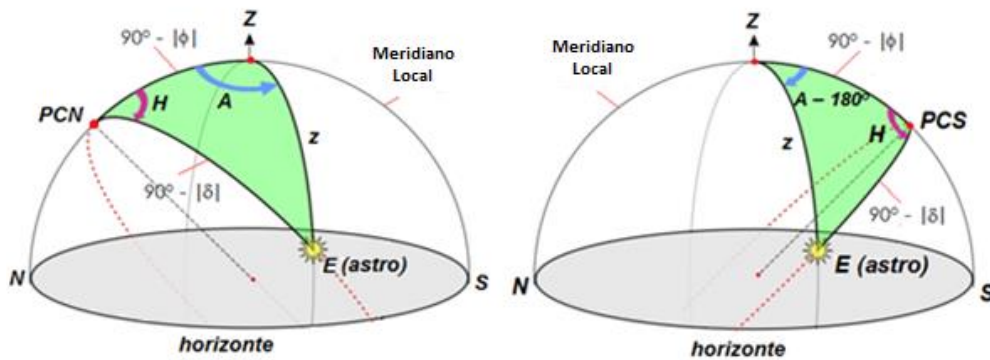
De la ecuación de Stefan-Boltzmann, tenemos:

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \Rightarrow L \propto R^2 \cdot T^4 \Rightarrow L \propto R^2 \cdot \left(\frac{M}{R}\right)^4 \Rightarrow L \propto \frac{M^4}{R^2} \Rightarrow L \propto \frac{M^4}{\left(M^{\frac{1}{3}}\right)^2} \Rightarrow L \propto M^{\frac{10}{3}}$$

Entonces la constante b de proporcionalidad es $b = 3.3$. Por lo general, este valor se acerca a **3,5**.

5)

a) A partir de la Ley de los cosenos para triángulos esféricos, se pueden establecer las siguientes relaciones:



Triángulo de posición para un observador en el Hemisferio Norte y otro en el Hemisferio Sur.

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(90^\circ - |\phi|) \cdot \cos(90^\circ - |\delta|) + \sin(90^\circ - |\phi|) \cdot \sin(90^\circ - |\delta|) \cdot \cos H \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos z = \sin |\phi| \cdot \sin |\delta| + \cos |\phi| \cdot \cos |\delta| \cdot \cos H \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos H = \cos z \cdot \sec |\phi| \cdot \sec |\delta| - \tan |\phi| \cdot \tan |\delta| \end{aligned}$$

Para el amanecer o el atardecer, tenemos $z = 90^\circ$:

$$\cos H = \cos 90^\circ \cdot \sec |\phi| \cdot \sec |\delta| - \tan |\phi| \cdot \tan |\delta| \Rightarrow \boxed{\cos H = -\tan \phi \cdot \tan \delta}$$

Considerando la situación del solsticio de verano para el hemisferio sur ($\delta_{Sol} = -23^\circ 27'$), tenemos que el ángulo horario de ocaso del Sol H_1 , en el Trópico de Capricornio ($\phi_1 = -23^\circ 27'$) y H_2 en el Trópico de Cáncer ($\phi_2 = +23^\circ 27'$), en esta fecha son válidos:

$$\begin{aligned} \cos H_1 &= -\tan \phi_1 \cdot \tan \delta_{Sol} = -\tan(-23^\circ 27') \cdot \tan(-23^\circ 27') \Rightarrow H_1 = 100,84^\circ = 6,72 \text{ h} \\ \cos H_2 &= -\tan \phi_2 \cdot \tan \delta_{Sol} = -\tan(23^\circ 27') \cdot \tan(-23^\circ 27') \Rightarrow H_2 = 79,15^\circ = 5,28 \text{ h} \end{aligned}$$

Como el tiempo de permanencia de la estrella sobre el horizonte es igual al doble del ángulo de puesta horario, tenemos que el tiempo que permanecerá el Sol sobre el horizonte en cada una de las localizaciones es:

$$t_1 = 2.H_1 = 13,44 \text{ h} \quad \text{y} \quad t_2 = 2.H_2 = 10,56 \text{ h}$$

c) Ordenando los datos, tenemos:

