

Prueba Teórica Grupal - Soluciones

1) a) Considerando un punto en la superficie de Betelgeuse, tenemos que el flujo total se puede estimar por:

$$F_{tot} = \frac{L_{Bet}}{4\pi \cdot R_{Bet}^2} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot L_{Sol}}{4\pi \cdot (10^3 \cdot R_{Sol})^2} \Rightarrow F_{tot} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 3,8 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (10^3 \cdot 6,955 \cdot 10^8)^2} \Rightarrow F_{tot} = 7,505 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$$

b) Bajo las condiciones impuestas, tenemos:

$$F_{Bet} = \frac{L_{Bet}}{4\pi \cdot d^2} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot L_{Sol}}{4\pi \cdot d^2} \Rightarrow F_{Bet} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 3,8 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot \left(\frac{197 \cdot 3,086 \cdot 10^{16}}{100}\right)^2} \Rightarrow F_{Bet} = 9,823 \cdot 10^{-4} \frac{W}{m^2}$$

c) De la ecuación general de magnitudes, tenemos:

$$m_{Bet} - m_{Sol} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_{Bet}}{F_{Sol}}\right) \Rightarrow m_{Bet} + 26,72 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{9,823 \cdot 10^{-4}}{1,366 \cdot 10^3}\right) \Rightarrow m_{Bet} = -11,36$$

d) El radio de Betelgeuse, en au, es:

$$R_{Bet} = \frac{10^3 \cdot R_{Sol}}{1,5 \cdot 10^{11}} = \frac{10^3 \cdot 6,995 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^{11}} \Rightarrow R_{Bet} = 4,67 \text{ ua}$$

El primer planeta del Sistema Solar que estaría fuera del radio de Betelgeuse sería Júpiter, ya que su semieje orbital es de unas 5,2 au.

2) a) De la 3ª Ley de Kepler, se deriva:

$$\begin{cases} \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \\ T^2 = C \cdot \frac{R^3}{M} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2}{G} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow C = 5,913 \cdot 10^{11} \frac{kg^2}{N \cdot m^2}$$

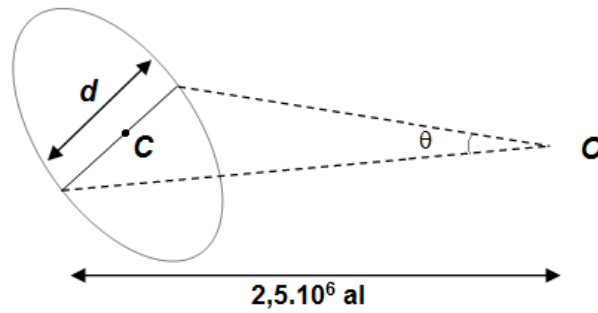
b) Siendo R_1 , el radio orbital del satélite alrededor de Saturno, de la 3ª Ley de Kepler, resulta:

$$T_1^2 = C \cdot \frac{R_1^3}{M_{Sat}} \Rightarrow (234,01 \cdot 24 \cdot 3600)^2 = 5,913 \cdot 10^{11} \cdot \frac{R_1^3}{95,5 \cdot 97 \cdot 10^{24}} \Rightarrow R_1 = 7,319 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,048 \text{ ua}$$

c) Dado que la T_{Luna} es el nuevo período de la Luna alrededor de la Tierra, de la 3ª Ley de Kepler, tenemos:

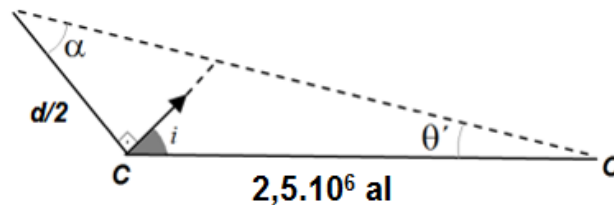
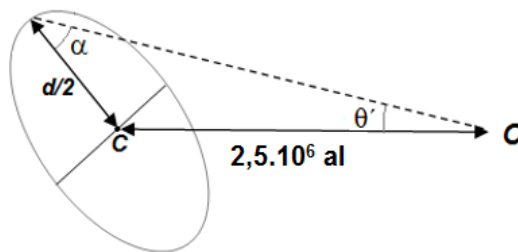
$$T_{Luna}^2 = C \cdot \frac{R_{Luna}^3}{M_{Terra}} \Rightarrow T_{Luna}^2 = 5,913 \cdot 10^{11} \cdot \frac{(3,84 \cdot 10^8)^3}{3,5 \cdot 97 \cdot 10^{24}} \Rightarrow T_{Luna} = 1,367 \cdot 10^6 \text{ s} = 15,82 \text{ dias}$$

3) a) Siendo d el diámetro de la galaxia, analizando la figura, tenemos:



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{d}{2,5 \cdot 10^6} \Rightarrow d = 2,5 \cdot 10^6 \cdot \operatorname{tg} 3,2^\circ \Rightarrow d = 1,396 \cdot 10^5 \text{ al}$$

b) Aplicando la ley de los senos, obtenemos:



$$\frac{2,5 \cdot 10^6}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{6,99 \cdot 10^4}{\operatorname{sen} 0,5^\circ} \Rightarrow \alpha = 18,18^\circ$$

Por lo tanto:

$$\alpha + \theta' + i = 90^\circ \Rightarrow i = 71,32^\circ$$

c) La velocidad de recesión de esta galaxia es:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{6556,22 - 6562,80}{6562,80} = \frac{v}{3 \cdot 10^5} \Rightarrow v = -300,79 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Ahora el módulo de parámetros z :

$$|z| = \frac{v}{c} \Rightarrow |z| = 10^{-3}$$

d) La magnitud absoluta M de la galaxia es:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow 4,36 - M = 5 \log \left(\frac{2,5 \cdot 10^6}{3,26} \right) - 5 \Rightarrow \boxed{M = -20,06}$$

e) La magnitud límite de este telescopio es:

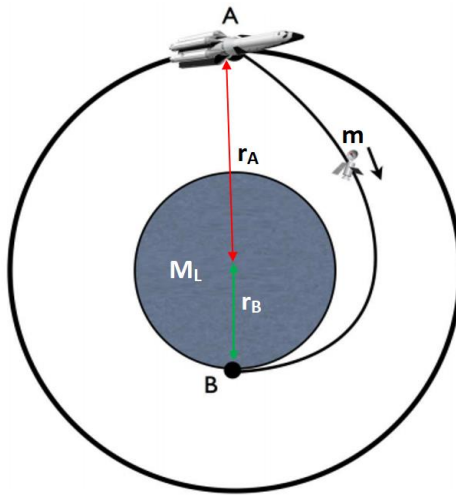
$$m_{lim} = 7,1 + 5 \log d \Rightarrow m_{lim} = 13,63$$

Por lo tanto, como $m < m_{lim}$, será posible observar la galaxia con este telescopio.

4) a) Sabiendo que la órbita en la nave espacial es circular, tenemos:

$$v_{nave} = \sqrt{\frac{GM_{Luna}}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,4 \cdot 10^{22}}{1,74 \cdot 10^6 + 1,0 \cdot 10^6}} \Rightarrow \boxed{v_{nave} = 1342 \text{ m/s}}$$

b) A partir de la conservación del momento angular y también de la energía, la velocidad v_S con la que la sonda debe salir de la nave espacial, **en relación con la Luna**, es:



$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} m \cdot v_S \times r_A &= m \cdot v_B \times r_B \\ \frac{m \cdot v_S^2}{2} - \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r_A} &= \frac{m \cdot v_B^2}{2} - \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r_B} \end{aligned} \right. \Rightarrow \\ & \left| \begin{aligned} v_B &= \frac{r_A \cdot v_S}{r_B} \\ v_S^2 - v_B^2 &= 2GM_L \cdot \left(\frac{r_B - r_A}{r_A \cdot r_B} \right) \end{aligned} \right. \Rightarrow v_S = \sqrt{\frac{2GM_L \cdot r_B}{r_A \cdot (r_B + r_A)}} \Rightarrow \\ & \Rightarrow v_S = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,4 \cdot 10^{22} \cdot 1,74 \cdot 10^6}{2,74 \cdot 10^6 \cdot (1,74 \cdot 10^6 + 2,74 \cdot 10^6)}} \Rightarrow \boxed{v_S = 1183 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Antes de calcular la velocidad a la que debe impulsarse la sonda, en relación con la nave espacial, recordemos que la velocidad orbital de la nave espacial está dada por $v_{nave} = \sqrt{\frac{GM_L}{R_L + h}}$. Comparando las dos ecuaciones, vemos que

$V_{nave} > V_S$ entonces la sonda debe ser frenada, es decir, la sonda debe ser lanzada en dirección opuesta a la velocidad orbital de la nave espacial. Entonces:

$$v_A = v_{nave} - v_S = 1342 - 1183 \Rightarrow v_A = 160 \text{ m/s}$$

c) La velocidad V_B con la que la sonda golpea la superficie lunar es:

$$v_B = \frac{r_A \cdot v_S}{r_B} = \frac{2,74 \cdot 10^6 \cdot 1183}{1,74 \cdot 10^6} \Rightarrow v_B = 1863 \text{ m/s}$$