

Prueba Teórica Grupal - Soluciones

1) a) La diferencia de longitud, en horas, de cada una de las ciudades con relación a La Paz ($\lambda = 68^\circ 08' O$) es:

- Brasilia: $\Delta\lambda_1 = 68^\circ 08' - 47^\circ 55' = 20^\circ 13' \Rightarrow \Delta\lambda_1 = 1h20min52s$
- Montevideo: $\Delta\lambda_2 = 68^\circ 08' - 56^\circ 10' = 11^\circ 58' \Rightarrow \Delta\lambda_2 = 47min52s$
- Ciudad de México: $\Delta\lambda_3 = 68^\circ 08' - 98^\circ 11' = -30^\circ 03' \Rightarrow \Delta\lambda_3 = -2h00min12s$
- Santiago: $\Delta\lambda_4 = 68^\circ 08' - 70^\circ 39' = -2^\circ 31' \Rightarrow \Delta\lambda_4 = -10min04s$
- Supuesto: $\Delta\lambda_5 = 68^\circ 08' - 57^\circ 27' = 10^\circ 41' \Rightarrow \Delta\lambda_5 = 42min44s$
- Bogotá: $\Delta\lambda_6 = 68^\circ 08' - 74^\circ 08' = -6^\circ \Rightarrow \Delta\lambda_6 = -24min$

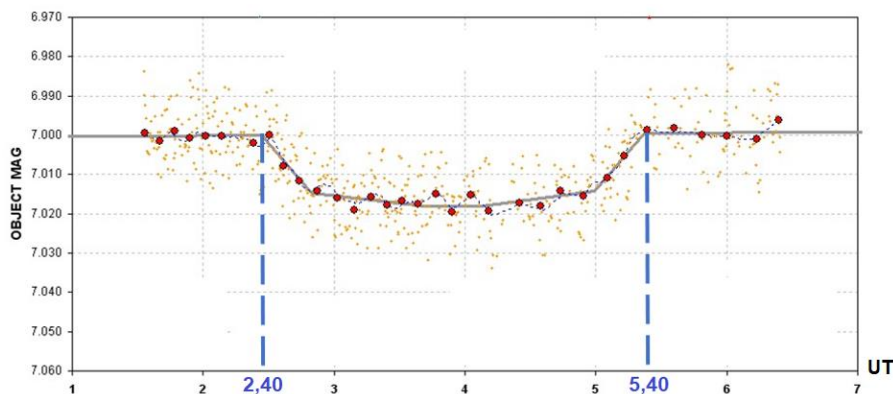
Sabiendo que la hora solar verdadera en La Paz es el mediodía ($12^h00^m00^s$), tenemos que, en este instante, la hora solar verdadera en cada una de las ciudades son respectivamente:

- Brasilia: $H_1 = 12h + 1h20min52s \Rightarrow H_1 = 13h20min52s$
- Montevideo: $H_2 = 12h + 47min52s \Rightarrow H_2 = 12h47min52s$
- Ciudad de México: $H_3 = 12h - 2h00min12s \Rightarrow H_3 = 9h59min48s$
- Santiago: $H_4 = 12h - 10min04s \Rightarrow H_4 = 11h49min56s$
- Asunción: $H_5 = 12h + 42min44s \Rightarrow H_5 = 12h42min44s$
- Bogotá: $H_6 = 12h - 24min \Rightarrow H_6 = 11h36min$

b) La hora indicada por el reloj es hora civil y respeta el huso horario del meridiano central. Como La Paz está a $8^\circ 08' O$ este del meridiano 60° (GMT-4), cuando sean las 12h de tiempo solar serán **12h32min32s** de tiempo civil. Por tanto, para los demás países, respetando los respectivos husos horarios, tenemos:

- Brasilia (GMT-3): **13h32min32s**
- Montevideo (GMT-4): **12h32min32s**
- Ciudad de México (GMT-5): **11h32min32s**
- Santiago (GMT-4): **12h32min32s**
- Asunción (GMT-4): **12h32min32s**
- Bogotá (GMT-5): **11h32min32s**

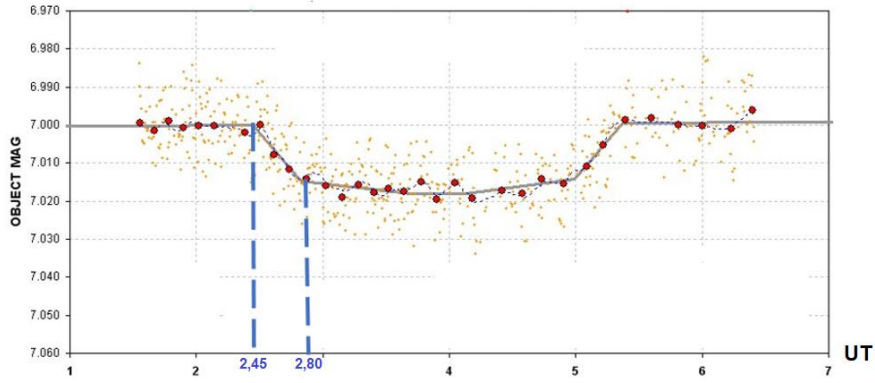
2) a) Analizando el gráfico y respetando la escala presentada, tenemos:



Por lo tanto, el tiempo de tránsito total fue:

$$d = 5,40 - 2,40 = 3,00h$$

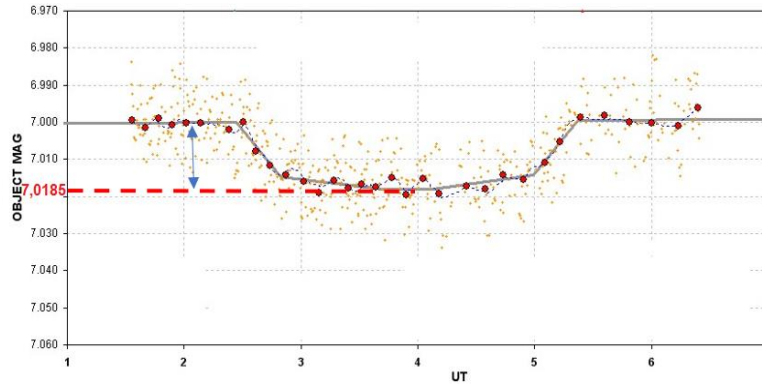
b) Analizando el gráfico y respetando la escala presentada, tenemos:



Por lo tanto, la hora de entrada o salida fue:

$$t = 2,80 - 2,45 = 0,35h = \boxed{21 \text{ min}}$$

c) Analizando el gráfico y respetando la escala presentada, tenemos:



Entonces la profundidad de la curva de luz es:

$$\Delta m = 7,0185 - 7,000 = \boxed{0,0185}$$

d) Comparando la magnitud de la estrella antes del tránsito m_1 y después del tránsito m_2 , tenemos que el valor del radio r del planeta es:

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \\ F_1 &= \frac{L_1}{A} = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{A} \quad \Rightarrow -\Delta m = -2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) \Rightarrow -0,0185 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) \Rightarrow \\ F_2 &= \frac{L_2}{A} = \frac{4\pi(R^2 - r^2) \cdot \sigma \cdot T^4}{A} \\ \Rightarrow \frac{R^2}{R^2 - r^2} &= 10^{7,4 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow r = R \cdot \sqrt{1 - 10^{-7,4 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow r = 0,916,955 \cdot 10^8 \cdot 0,12997 \Rightarrow \boxed{r = 8,226 \times 10^7 \text{ m}} \end{aligned}$$

e) Convirtiendo t y d a segundos, de la ecuación (2), tenemos que el parámetro adimensional b es:

$$t = d \cdot \frac{r}{R} \cdot \sqrt{1-b^2} \Rightarrow 1260 = 10800 \cdot \frac{8,226 \cdot 10^7}{0,91.6,995 \cdot 10^8} \cdot \sqrt{1-b^2} \Rightarrow b = 0,439$$

Aplicando la 3ra Ley de Kepler en la ecuación (1), tenemos:

$$\left| \begin{aligned} d &= \frac{PR}{\pi \cdot a} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{a}{R} \cdot \cos i\right)^2} \\ b &= \frac{a}{R} \cdot \cos i \\ P^2 &= \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3 \end{aligned} \right. \Rightarrow d^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot \frac{a^3 R^2}{\pi^2 a^2} \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - b^2 \right] \Rightarrow d^2 = \frac{4aR^2}{GM} \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - b^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10800^2 = \frac{4a(0,91.6,995 \cdot 10^8)^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,92.1,989 \cdot 10^{30}} \cdot \left[\left(1 + \frac{8,226 \cdot 10^7}{0,91.6,995 \cdot 10^8}\right)^2 - (0,439)^2 \right] \Rightarrow a = 8,115 \cdot 10^9 m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 0,0541 \text{ ua}}$$

f) La pendiente i DE ACUERDO:

$$b \cdot R = a \cdot \cos i \Rightarrow 0,439 \cdot 0,91.6,995 \cdot 10^8 = 8,115 \cdot 10^9 \cdot \cos i \Rightarrow \boxed{i = 88^\circ}$$

g) El periodo orbital P , tiene valor:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3 \Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2 \cdot (8,115 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,92.1,989 \cdot 10^{30}} \Rightarrow P = 4,155 \cdot 10^5 s = \boxed{4 \text{ dias } 20h}$$

3) a) Haciendo la diferencia entre los semiejes de dos planetas sucesivos, encontramos los siguientes valores: 0.8 au; 1,6 agua; 3.2 agua; 25,7 agua y 51,2 agua; que se puede escribir como $0,8 \cdot 2^n$ con $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 7\}$. Para tener el primer término ($n = 0$) con un valor de 1.1 ua, debemos agregar 0.3 ua a la relación, por lo que la ecuación que describe los semiejes de los planetas es:

$$\boxed{a = 0,3 + 0,8 \cdot 2^n} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 7\}$$

b) Analizando la tabla y la secuencia encontrada, tenemos que el semieje mayor de la órbita del planeta faltante ($n = 4$) es:

$$a = 0,3 + 0,8 \cdot 2^4 \Rightarrow \boxed{a = 13,1 \text{ ua}}$$

Ahora su periodo orbital P será:

$$\frac{P_A^2}{a_A^3} = \frac{P^2}{a^3} \Rightarrow \frac{1,63^2}{1,1^3} = \frac{P^2}{13,1^3} \Rightarrow \boxed{P = 66,99 \text{ años}}$$

c) Aplicando la 3ª Ley de Kepler, con datos de los planetas de menor masa A y de mayor masa E , tenemos que la masa M de la estrella central es:

$$\frac{P_A^2}{a_A^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m_A)} \Rightarrow \frac{(1,63,3,15,10^7)^2}{(1,1,1,5,10^{11})^3} = \frac{4\pi^2}{6,67,10^{-11}(M + 0,165,5,974,10^{24})} \Rightarrow M = 1,10^{30} \text{ kg}$$

$$\frac{P_E^2}{a_E^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m_E)} \Rightarrow \frac{(185,33,3,15,10^7)^2}{(25,9,1,5,10^{11})^3} = \frac{4\pi^2}{6,67,10^{-11}(M + 419,5,974,10^{24})} \Rightarrow M = 1,10^{30} \text{ kg}$$

Concluimos que la masa de los planetas es mucho menor que la masa de la estrella central, cuyo valor es de aproximadamente **1,10³⁰ kg**.

4) a) Considerando el VLS en reposo con respecto a la Tierra, tenemos que su velocidad tangencial, paralela a la superficie terrestre, en el momento del lanzamiento es igual a la velocidad de rotación de la Tierra en el lugar donde se encuentra la base, por lo tanto:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2,3,6400}{24} \Rightarrow v = 1600 \text{ km/h}$$

b) Oeste a Este. Del enunciado se desprende que para poner en órbita un satélite es necesario alcanzarlo a una velocidad de 27 000 km/h, velocidad paralela a la superficie de la Tierra. Como la Tierra gira de Oeste a Este, si lanzamos el VLS en esta dirección, por inercia, aprovecharemos su velocidad de rotación y, en consecuencia, ahorraremos recursos como, por ejemplo, propulsor.

c) Considerando el arrastre mínimo en el instante del lanzamiento, de la 2ª Ley de Newton, tenemos:

$$E - P = m \cdot a \Rightarrow 10 \times 10^5 - 5 \times 10^5 = 5 \times 10^4 a \Rightarrow a = 10 \text{ m/s}^2$$

d) Analizando la tabla, tenemos que la masa total inicial del VLS es de 50 000 kg y después del final de la quema del propulsor de la segunda etapa se convierte en 8 391 kg. Por lo tanto, entre estos eventos hubo una variación de masa de 41 609 kg. Esta variación corresponde a las masas de los 4 motores de primera etapa descartados, considerados iguales con masa total M_1 , la quema propulsora de primera etapa, con masa total P_1 , y la quema propulsora de segunda etapa, con masa P_2 , así:

$$M_1 + P_1 + P_2 = 41609 \text{ kg}$$

El intervalo de tiempo entre el inicio y el final de la combustión del propulsor de la segunda etapa es de 71 s. Como la segunda etapa consume 120 kg de propelente cada segundo, tenemos $P_2 = 8520 \text{ kg}$.

Entre el final de la quema de la primera etapa y la separación de la primera etapa, hubo una variación de masa de 6000 kg, que corresponde a la disposición de los 4 motores, de masa total M_1 , y 2 s de quema del propulsor de la segunda etapa, es decir, 240 kg. Por lo tanto, $M_1 = 5760 \text{ kg}$.

De las conclusiones anteriores tenemos que la masa propulsora de los 4 propulsores de primera etapa es:

$$5760 + P_1 + 8520 = 41609 \Rightarrow P_1 = 27329 \text{ kg}$$

e) A los pocos segundos de la separación de la tercera etapa, se inicia la maniobra de vuelco, que se produce antes del encendido de la cuarta etapa. Como el VLS no es propulsado durante esta fase, se produce una reducción de la velocidad del conjunto, debido a la acción de la fuerza gravitatoria.