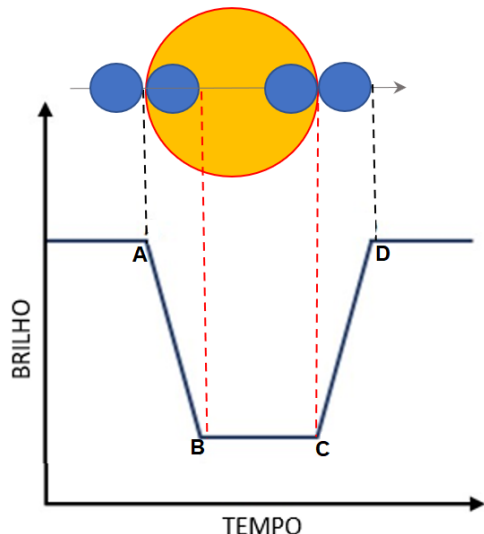


Prova Teórica em Grupo – Resoluções

1) a) Sendo R o raio de TRAPPIST-1 e r o raio de TRAPPIST-1g, considerando que a velocidade tangencial de TRAPPIST-1g é constante e seu plano orbital é paralelo a linha de visada, temos:



$$\begin{cases} d_{AD} = v \cdot t_{AD} \\ d_{BC} = v \cdot t_{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(R+r) = v \cdot t_{AD} \\ 2(R-r) = v \cdot t_{BC} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{v \cdot (t_{AD} + t_{BC})}{4} \text{ e } r = \frac{v \cdot (t_{AD} - t_{BC})}{4}$$

Logo:

$$R = \frac{4,15 \cdot 10^4 (1,19 + 0,99) \cdot 3600}{4} \Rightarrow R = 8,14 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$r = \frac{4,15 \cdot 10^4 (1,19 - 0,99) \cdot 3600}{4} \Rightarrow r = 7,47 \cdot 10^6 \text{ m}$$

b) Da equação geral das magnitudes, temos que o fluxo F_1 de TRAPPIST-1 é:

$$m_1 - m_{Sol} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_{Sol}}\right) \Rightarrow 13,43 - (-26,72) = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{1366}\right) \Rightarrow F_1 = 1,18 \cdot 10^{-13} \frac{W}{m^2}$$

Sabendo que TRAPPIST-1 está a $d = 12$ pc, da definição de fluxo e da equação de Stefan-Boltzmann, vem:

$$\begin{cases} F_1 = \frac{L}{4\pi d^2} \\ L = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \Rightarrow F_1 = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{d^2} \Rightarrow 1,18 \cdot 10^{-13} = \frac{(8,142 \cdot 10^7)^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot T^4}{(12,3086 \cdot 10^{16})^2} \Rightarrow T = 2560K$$

c) Considerando a situação de magnitude m_1 (TRAPPIST-1 não eclipsada por nenhum planeta) e situação de magnitude m_2 (TRAPPIST-1 eclipsada por um planeta de raio r); como o sistema está sempre a mesma distância d da Terra, da equação geral das magnitudes, vem:



Magnitude m_1

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{L_1}{4\pi d^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 - 4\pi r^2 \cdot \sigma \cdot T^4}\right) \Rightarrow$$



Magnitude m_2

$$\Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) \Rightarrow m_2 = m_1 + 2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right)$$

d) Utilizando os dados do exoplaneta TRAPPIST-1e, temos que a massa de TRAPPIST-1 é:

$$M_{\text{TRAPPIST-1}} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{P^2} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \cdot \frac{(0,02815 \cdot 10^{11})^3}{(6,09 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \Rightarrow M_{\text{TRAPPIST-1}} = 1,58 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

Aplicando a 3ª Lei de Kepler $\left(\frac{P_1^2}{a_1^3} = \frac{P_2^2}{a_2^3}\right)$, vem:

Planeta	Período (dias)	Raio orbital (ua)
1b	1,51	0,011
1c	2,38	0,015
1d	4,04	0,021
1e	6,09	0,028
1f	9,20	0,037
1g	12,35	0,045
1h	18,60	0,059

e) A potência recebida (P_R) por um exoplaneta, de TRAPPIST-1 de luminosidade L_{estrela} , a distância d , é dada por:

$$\begin{cases} I = \frac{P_R}{\pi R_p^2} \\ I = (1-a) \cdot I_0 \Rightarrow P_R = I_0 \cdot (1-a) \cdot \pi R_p^2 \\ I_0 = \frac{L_{\text{estrela}}}{4\pi \cdot d^2} \end{cases}$$

Onde I é a incidência luminosa e a é chamado o albedo. **Comentário:** Albedo (do latim *abus* “brancura”) é o poder de reflexão de uma superfície. Pode ser obtido pela razão entre a radiação refletida pela radiação incidente.

Já a potência emitida (P_E) pelo exoplaneta é expressa por:

$$P_E = \varepsilon 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4$$

Onde ε é a emissividade que para um corpo negro tem valor 1.

No equilíbrio térmico, $P_R = P_E$, logo:

$$\varepsilon 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4 = I_0 \cdot (1-a) \cdot \pi R_p^2 \Rightarrow 4 \cdot \sigma T_p^4 = \frac{L_{\text{estrela}}}{4\pi \cdot d^2} \cdot (1-a) \Rightarrow 4 \cdot \sigma T_p^4 = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot d^2} \cdot (1-a)$$

$$d = \sqrt{\frac{R^2 \cdot T^4 \cdot (1-a)}{4 \cdot T_p^4}} = \frac{R \cdot T^2 \cdot \sqrt{1-a}}{2 \cdot T_p^2} \Rightarrow d = \left(\frac{T}{T_p}\right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1-a}}{2}$$

Para encontrar os limites da zona habitável devemos ter um planeta cuja temperatura permita a presença de água no estado líquido, então $273 \text{ K} \leq T_p \leq 373 \text{ K}$. Sabendo que a temperatura de TRAPPIST-1 é $T = 2560 \text{ K}$, temos:

$$d_{\text{mín}} = \left(\frac{T}{T_{p_{\text{máx}}}}\right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1-a}}{2} = \left(\frac{2560}{373}\right)^2 \cdot \frac{8,142 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{1-0,1}}{2} \Rightarrow d_{\text{mín}} = 1,819 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,012 \text{ ua}$$

$$d_{\text{máx}} = \left(\frac{T}{T_{p_{\text{mín}}}}\right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1-a}}{2} = \left(\frac{2560}{273}\right)^2 \cdot \frac{8,142 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{1-0,1}}{2} \Rightarrow d_{\text{máx}} = 3,396 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,023 \text{ ua}$$

Portanto, os exoplanetas dentro da zona habitável são TRAPPIST- 1c e TRAPPIST- 1d.

f) Considerando que no primeiro trecho da viagem a micro nave se desloca com aceleração constante (MRUV) e no segundo trecho permanece com velocidade constante (MRU), temos:

- Trecho 1:

$$v = v_0 + a.t_1 \Rightarrow 0,2.c = 35.t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{0,2c}{35} = 1,714.10^6 s$$

$$v^2 = v_0^2 + 2.a.d_1 \Rightarrow (0,2.c)^2 = 2.35.d_1 \Rightarrow d_1 = \frac{4.10^{-2}.c^2}{70} = 5,142.10^{13} m$$

- Trecho 2:

$$d_2 = v.t_2 \Rightarrow 12,3,086.10^{16} - d_1 = 0,2c.t_2 \Rightarrow t_2 = 6,159.10^9 s$$

Logo, o tempo total da viagem é:

$$t = t_1 + t_2 = 1,714.10^6 + 6,159.10^9 \approx 195 \text{ anos}$$

2) a) Analisando a Figura 1, temos que a altura h do Sol é:

$$\operatorname{tg} h = \frac{23}{22} \Rightarrow h = 46,27^\circ$$

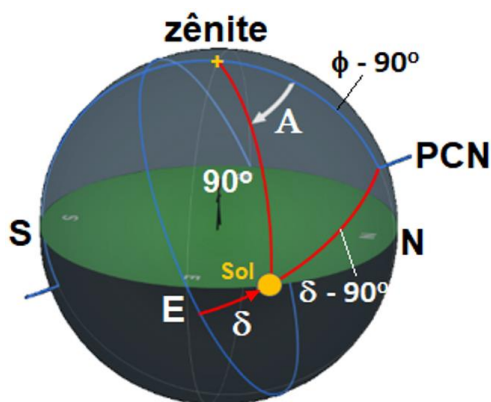
Considerando que a declinação do Sol no dia 21 de dezembro é $\delta = -23,45^\circ$, a latitude ϕ de Chichén Itzá é:

$$|\phi| + |\delta| + h = 90^\circ \Rightarrow |\phi| = 90^\circ - 23,45^\circ - 46,27^\circ \Rightarrow |\phi| = 20,73^\circ N$$

b) Sabendo que o azimute da escada Oeste é $A_{EW} = 290^\circ$, a Figura 2, temos:

$$A_{EW} - 270^\circ = \theta \Rightarrow \theta = 290^\circ - 270^\circ \Rightarrow \theta = 20^\circ$$

c) Se o Sol faz passagem zenital em Tinum no dia 23 de maio, sua declinação, nesta data, é igual a latitude local, ou seja, $\delta = \phi = 20,73^\circ$. Para o nascer do Sol, o azimute A será dado por:



$$\begin{aligned} \cos(\delta - 90^\circ) &= \cos(\phi - 90^\circ) \cos 90^\circ + \sin(\phi - 90^\circ) \sin 90^\circ \cos A \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin \delta = \cos \phi \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\sin \delta}{\cos \phi} \Rightarrow \cos A = \frac{\sin \delta}{\cos \phi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos A = \operatorname{tg} 20,73^\circ \Rightarrow A = 67,76^\circ \end{aligned}$$

Já para o pôr do Sol, com azimute A' , temos:

$$\cos(360^\circ - A') = \operatorname{tg} 20,73^\circ \Rightarrow A' = 292,24^\circ$$

d) A distância máxima e mínima entre o planeta Terra e Vênus é:

$$d_{\text{máx}} = 1ua + 0,72ua = 1,72ua \Rightarrow d_{\text{máx}} = 2,58.10^{11} m$$

$$d_{\text{mín}} = 1ua - 0,72ua = 0,28ua \Rightarrow d_{\text{mín}} = 4,20.10^{10} m$$

Considerando o diâmetro de Vênus $2.r = 1,21.10^7$ m, temos:

$$\operatorname{tg} \theta_{\max} = \frac{1,21.10^7 \text{ m}}{4,20.10^{10} \text{ m}} \Rightarrow \theta_{\max} = 1,6.10^{-3^\circ} \Rightarrow \theta_{\max} = 59,42''$$

$$\operatorname{tg} \theta_{\min} = \frac{1,21.10^7 \text{ m}}{2,58.10^{11} \text{ m}} \Rightarrow \theta_{\min} = 2,7.10^{-3^\circ} \Rightarrow \theta_{\min} = 9,67''$$

e) Na culminação superior o ângulo horário tem valor zero ($H = 0$). Portanto, a ascensão reta do aglomerado é:

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow \alpha = 3h47 \text{ min}$$

Já o ângulo horário H' do aglomerado, neste instante, em *Greenwich*, é:

$$\begin{aligned} T_{SL} &= T_{SG} + \lambda \\ T_{SG} &= H' + \alpha \Rightarrow T_{SL} = H' + \alpha + \lambda \Rightarrow 3h47 \text{ min} = H' + 3h47 \text{ min} - 5h54 \text{ min } 42s \Rightarrow \\ \lambda &= -88^\circ 34' = -5h54 \text{ min } 42s \\ &\Rightarrow H' = 5h54 \text{ min } 42s \end{aligned}$$

Das relações apresentadas no enunciado, temos que 13 winales e 18 kines equivalem a 278 dias. Fixando o horário de observação sabemos que por dia o ângulo horário aumenta cerca de 4 min (1°) para Oeste ($360^\circ/365$ dias). Logo, após 278 dias a variação do ângulo horário (ΔH) será:

$$\Delta H = \frac{360^\circ}{365 \text{ dias}} \cdot 278 \text{ dias} \cdot \frac{1h}{15^\circ} \Rightarrow \Delta H = 18h16 \text{ min } 46s$$

Portanto, o novo ângulo horário (H'') das Plêiades em *Greenwich* será:

$$H'' = H' + \Delta H = 5h54 \text{ min } 42s + 18h16 \text{ min } 46s \Rightarrow H'' = 11 \text{ min } 28s$$

f) A declinação das Plêiades pode ser calculada por:

$$\delta - \phi + h = 90^\circ \Rightarrow \delta - 20^\circ 43,8' + 83^\circ 36' = 90^\circ \Rightarrow \delta = 27^\circ 7' 36''$$

Para um astro ser circumpolar visível é necessário que $\delta + \phi > 90^\circ$. Como $\delta + \phi > 47^\circ 51' 24''$, temos que as Plêiades **não** são circumpolares visíveis em Tulum.

g) Segundo as correspondências dadas, um baktun corresponde a $20 \times 20 \times 18 \times 20 = 144\,000$ kines. De forma que o maior período Maia é composto por $13 \times 144\,000$ kines = $1\,872\,000$ kines. Como 1 kin = 1 dia, o maior período Maia possui 5128 anos e 280 dias.

Portanto, a data de início do último maior período Maia é próxima ao dia **16 de março de 3116 a.C.**

3) a) Densidade numérica n , corresponde ao número de objetos N especificados por unidade de volume V , logo:

$$n = \frac{N}{V} \Rightarrow N = n.V$$

- Para $r < R_b$, a massa do sistema $M(r)$ varia com a distância r , de tal forma que:

$$\begin{aligned} M(r) &= N.m \\ N &= n \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow M(r) = \frac{4}{3} \pi n.m.r^3 \end{aligned}$$

Considerando que as estrelas de massa m estão em órbitas circulares no interior do bojo galáctico, vem:

$$\left| \begin{array}{l} F_G(r) = R_{CP} \\ F_G(r) = \frac{GM(r).m}{r^2} \Rightarrow \frac{GM(r).m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot n \cdot m \cdot r^3 \cdot m = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = r \sqrt{\frac{4\pi Gnm}{3}} \\ R_{CP} = \frac{mv^2}{r} \end{array} \right.$$

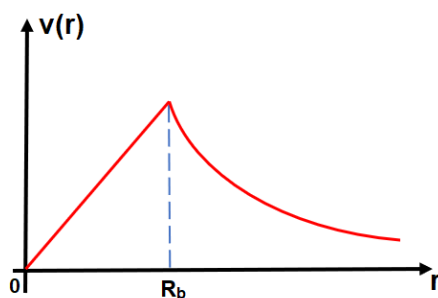
- Para $r \geq R_b$, a massa total M_T do sistema se mantém constante, uma vez que se deve desprezar as estrelas do halo, então:

$$\left| \begin{array}{l} M_T = N \cdot m \\ N = n \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_b^3 \Rightarrow M_T = \frac{4}{3} \pi \cdot n \cdot m \cdot R_b^3 \end{array} \right.$$

Considerando que as estrelas de massa m estão em órbitas circulares no interior do bojo galáctico, vem:

$$\left| \begin{array}{l} F_G = R_{CP} \\ F_G = \frac{GM_T.m}{r^2} \Rightarrow \frac{GM_T.m}{r^2} = \frac{mv'^2}{r} \Rightarrow \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot n \cdot m \cdot R_b^3 \cdot m = \frac{mv'^2}{r} \Rightarrow v' = \sqrt{\frac{4\pi GnmR_b^3}{3r}} \\ R_{CP} = \frac{mv'^2}{r} \end{array} \right.$$

b) Sabendo que G , n , m e R_b , são constantes, para $r < R_b$ temos $v \propto r$; e para $r \geq R_b$ vale $v' \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$, logo:

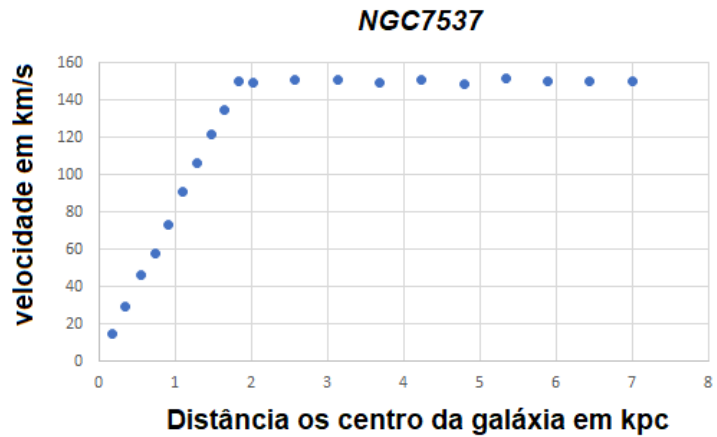


c) Seja N o número de estrelas da galáxia NGC7537, então como as estrelas são semelhantes ao Sol, a luminosidade da galáxia será $N \cdot L_{Sol}$. Da equação fundamental das magnitudes, vem:

$$\begin{aligned} m - m_{Sol} &= -2,5 \cdot \log\left(\frac{F}{F_{Sol}}\right) \Rightarrow m - m_{Sol} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{N \cdot L_{Sol}}{4\pi D^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_{Sol}}\right) \Rightarrow m - m_{Sol} = -2,5 \log\left(N \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 15,7 - (-26,72) = -2,5 \log\left(N \cdot \left(\frac{1,5 \cdot 10^{11}}{38 \cdot 10^6 \cdot 3,086 \cdot 10^{16}}\right)^2\right) \Rightarrow N = 6,5 \cdot 10^8 \text{ estrelas} \end{aligned}$$

d) A distância x das estrelas em relação ao centro da galáxia NGC7537 é dada por: $x = 38.10^6.tg(\theta/2)$, onde θ é o diâmetro angular de suas órbitas. Com os dados da Tabela 1, vem:

Diâmetro angular (")	v (km/s)	Distância (kpc)
2	14,32	0,184
4	29,48	0,349
6	46,06	0,553
8	58,04	0,737
10	73,5	0,921
12	91,1	1,105
14	106,76	1,289
16	121,48	1,474
18	134,86	1,658
20	150,14	1,842
22	149,72	2,026
28	150,72	2,579
34	151,14	3,132
40	149,2	3,684
46	151,22	4,237
52	148,62	4,790
58	151,68	5,343
64	150,28	5,895
70	150,28	6,448
76	150,62	7,000



e) Analisando o gráfico temos que a velocidade das estrelas aumenta linearmente com a distância ao centro da galáxia até uma distância R_b , e a partir deste ponto se mantém constante, logo:

- Para $r < R_b$:

$$v = 82,3.r$$

- Para $r \geq R_b$:

$$v' = 150,1 \text{ km/s}$$

f) Do gráfico do item (d), temos que o raio do bojo é da ordem de $R_b \approx 1,842$ kpc. Considerando que as estrelas de massa m estão em órbitas circulares no interior do bojo, pode-se estimar a massa do bojo de NGC7537 é:

$$\begin{aligned}
 F_G &= R_{CP} \\
 F_G &= \frac{GM'_T.m}{R_b^2} \Rightarrow \frac{GM'_T.m}{R_b^2} = \frac{mv'^2}{R_b} \Rightarrow M'_T = \frac{v'^2.R_b}{G} = \frac{(150,07.10^3)^2.(1,842.10^3.3,086.10^{16})}{6,67.10^{-11}} \Rightarrow \\
 R_{CP} &= \frac{mv'^2}{R_b} \\
 \Rightarrow M'_T &= 1,919.10^{40} \text{ kg} \Rightarrow M'_T = 9,65.10^9 M_{Sol}
 \end{aligned}$$

g) Para $r > R_b$, temos que a quantidade de matéria em função da distância é dada por:

$$v(r) = \sqrt{\frac{G.M(r)}{r}} \Rightarrow M(r) = \frac{r.v(r)^2}{G}$$

Do perfil de densidade esférica da matéria escura, a quantidade de matéria em função da distância deve se comportar como:

$$M(r) = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho(r) = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha$$

Logo, para $r > R_b$, a velocidade em função da distância pode ser escrita como:

$$\frac{r \cdot v(r)^2}{G} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha$$

Se desejamos obtermos um gráfico como no item **(d)**, em que a velocidade independente da distância, a partir de uma análise dimensional da equação anterior, temos que o expoente α deve valer:

$$1 = 3 + \alpha \Rightarrow \alpha = -2$$

h) Se $a \ll a_0 \Rightarrow \frac{a}{a_0} \ll 1$; logo $\mu = \frac{a}{a_0}$. Reescrevendo a 2ª Lei de Newton, temos que a velocidade de rotação das estrelas no halo galáctico é dada por:

$$\left| \begin{array}{l} F = m \cdot a \cdot \frac{a}{a_0} \\ a = \frac{v^2}{r} \\ F_G = \frac{GM_T \cdot m}{r^2} \\ F = F_G \end{array} \right. \Rightarrow \frac{GM_T \cdot m}{r^2} = \frac{m}{a_0} \cdot \left(\frac{v^2}{r} \right)^2 \Rightarrow v = \sqrt[4]{GM_T a_0}$$

Como G , M_T e a_0 são constantes, a velocidade de rotação das estrelas no halo galáctico também será constante.