

g) Visto do Sol, o diâmetro angular aparente da Terra (θ_T) e de Marte (θ_M), valem:

$$tg\theta_T = \frac{2R_T}{d_{T-S}} = \frac{2.6,371.10^6}{1,5.10^{11}} \Rightarrow \theta_T = 8,58.10^{-5} rad \quad tg\theta_M = \frac{2R_M}{d_{M-S}} = \frac{2.3,397.10^6}{1,52.1,5.10^{11}} \Rightarrow \theta_M = 3,01.10^{-5} rad$$

Já a velocidade angular de cada um os astros é:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{P_T} = \frac{2\pi}{1 \text{ ano}} = 2\pi \frac{rad}{ano} \quad \omega_M = \frac{2\pi}{P_M} = \frac{2\pi}{\sqrt{a_M^3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1,52^3}} \Rightarrow \omega_M = \frac{2\pi}{1,87} \frac{rad}{ano}$$

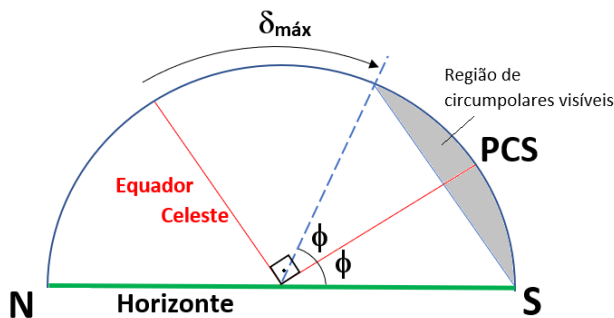
Considerando as órbitas circulares, coplanares e que Marte e a Terra giram no mesmo sentido, temos que o tempo de ocultação será:

$$\omega_R = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \omega_T - \omega_M = \frac{\theta_T + \theta_M}{\Delta t} \Rightarrow 2\pi - \frac{2\pi}{1,87} = \frac{8,58.10^{-5} + 3,01.10^{-5}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 3,967.10^{-5} \text{ ano} \Rightarrow \Delta t = 20,83 \text{ min}$$

5) a) Entre os dias 2 de março e 15 de junho existem 105 dias. Sabendo que após 365,25 dias a estrela estará culminando superiormente no mesmo horário, temos que após 105 dias o ângulo H entre a estrela e o meridiano local (ângulo horário) será:

$$H = 105 \text{ dias} \cdot \frac{360^\circ}{365,25 \text{ dias}} \Rightarrow H = 103,56^\circ \Rightarrow H = 6h 53min 58s$$

b) Do esquema, temos:



$$|\phi| \geq 90^\circ - |\delta| \Rightarrow |\phi| \geq 90^\circ - 62^\circ 41' \Rightarrow |\phi| \geq 27^\circ 19' S$$

c) No **Equador**, pois $\phi = 0^\circ$ o que implica $\delta = 90^\circ$.

d) A latitude do círculo polar antártico é cerca de $66^\circ 30' N$, o que implica que a declinação do Sol quando se torna circumpolar deverá ser:

$$\delta = 90^\circ - \phi \Rightarrow \delta = 90^\circ - 66^\circ 30' \Rightarrow \delta = +23^\circ 30'$$

O que corresponde ao **solstício de dezembro**.

Prova Teórica em Grupo – Resoluções

1) a) De acordo com o desenho, percebe-se que a manobra realizada se trata de uma órbita elíptica, sendo o ponto A o periastro, o ponto B o apoastro, e planeta M situado em um dos focos. Esta elipse tem como semieixo maior $a = 2R_0$ e distância focal $c = R_0$. Desta forma, temos que o centro desta se encontra no ponto D (ver figura a seguir) e, como a trajetória da nave em C e o segmento $\overline{AB}$ são paralelos, é possível determinar α usando os segmentos $\overline{CM}$ e $\overline{MD}$.

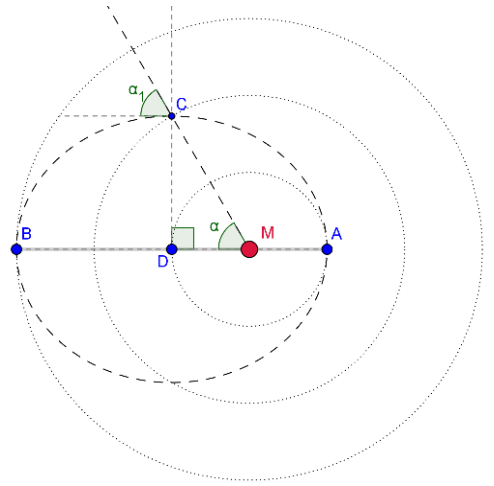
$$\text{Como } \overline{CM} = 2R_0 \text{ e } \overline{MD} = R_0, \text{ temos que } \cos \alpha = \frac{\overline{MD}}{\overline{CM}} = \frac{R_0}{2R_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

b) Pela 3ª Lei de Kepler, temos uma relação entre o período orbital (T) e o semieixo maior da órbita ($a = 2R_0$), sendo M a massa do planeta.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot 8R_0^3}{GM} \Rightarrow T = 4\pi R_0 \sqrt{\frac{R_0}{GM}}$$

Como o tempo para ir de A até B é metade do período orbital, temos que:

$$t_{A \rightarrow B} = \frac{T}{2} = 2\pi R_0 \sqrt{\frac{R_0}{GM}}$$



2) a) Isolando V na equação (3), temos a seguinte condição:

$$V = \frac{5,14 - T}{0,0042}$$

Aplicando a relação da velocidade na equação (2), temos o seguinte polinômio:

$$P = 0,00052 \left[0,22 \cdot \left(\frac{5,14 - T}{0,0042} \right) + 340 \right]^2$$

Resolvendo o produto notável entre colchetes, chegamos à seguinte aproximação quadrática para a amplitude P :

$$P = 193,01 - 33,19 \cdot T + 2743,66 \cdot T^2$$

b) Aplicando esta relação na expressão (1) e usando a equação (4), temos a seguinte resolução:

$$P = -2,846 + \left[\left(\frac{6,54}{\sqrt{2}} \right) \cdot (0,047 \cdot V + 0,644) \right] - \left[\left(\frac{0,118}{2} \right) \cdot (0,047 \cdot V + 0,644)^2 \right] - \left[\left(\frac{0,002}{2\sqrt{2}} \right) \cdot (0,047 \cdot V + 0,644)^3 \right]$$

A resolução de todos os termos chega ao seguinte polinômio:

$$P = 0,1073 + 0,2134 \cdot V - 1,333 \cdot 10^{-4} \cdot V^2 - 7,341 \cdot 10^{-8} \cdot V^3$$

c) O melhor caso é quando a ejeção de massa coronal é lenta ($V = 300$ km/s), pois é possível detectá-la com boa antecedência, tomando assim medidas preventivas. Já no pior caso, a velocidade da ejeção é a maior possível ($V = 800$ km/s). Usando a relação (3), temos o seguinte intervalo de tempo para a tempestade chegar na Terra:

$$\begin{cases} T_{300} = -0,0042 \cdot 300 + 5,14 \\ T_{800} = -0,0042 \cdot 800 + 5,14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{300} = 3,88 \text{ dias (melhor caso)} \\ T_{800} = 1,78 \text{ dias (pior caso)} \end{cases}$$

d) Se o a perturbação teve um valor de 850 nT, ao aplicarmos este dado na relação calculada no item a, obtém-se o tempo de trânsito (T):

$$850 = 193,01 - 33,19 \cdot T + 2743,66 \cdot T^2 \Rightarrow 2743,66 \cdot T^2 - 33,19 \cdot T - 656,99 = 0$$

Trata-se de uma equação de segundo grau. Para obtermos o tempo de trânsito, calcula-se as raízes positivas desta equação. Desta forma, temos que $T = 0,4954$ dias, o que implica que a tempestade de 1859 aconteceu cerca de 12 horas antes de sua chegada na Terra.

e) Para este caso, podemos utilizar a relação obtida no item b, que vincula a amplitude da perturbação da CME com a velocidade da CME (V):

$$P = 0,1073 + 0,2134 \cdot V - 1,333 \cdot 10^{-4} \cdot V^2 - 7,341 \cdot 10^{-8} \cdot V^3$$

Entretanto, os índices vinculados aos termos quadrático e cúbico são muito baixos. Desta forma, podemos desprezar os dois últimos termos do polinômio, o que estabelece uma relação linear entre P e V :

$$P = 0,1073 + 0,2134 \cdot V$$

Se $P = 850$ nT, temos a seguinte estimativa para V : **$V = 3982$ km/s.**

3) a) Tal fato pode ser afirmado ao analisar os espectros das regiões $POS5$ e $POS6$. Nas duas faixas espectrais analisadas, percebe-se que as regiões apresentam linhas de emissão com um mesmo padrão comparadas com $POS4$ adotado como repouso uma vez que se encontra no centro do disco. No caso da região $POS5$, as linhas se deslocam para a faixa do vermelho do espectro, indicando que este ponto está se afastando de nós. No caso de $POS6$, as linhas se deslocam para o azul, o que mostra que está região se aproxima de nós.

b) Adotando a distância de M87 como $d = 16$ Mpc, podemos ter a distância das posições medidas em relação à região central. Usando a escala adotada na imagem, nota-se que as regiões $POS5$ e $POS6$ apresentam distância angular de $\alpha = 0,25''$ de arco. Desta forma, usando a relação de tamanho angular, temos que:

$$D \cdot \alpha = D \Rightarrow 16 \text{ Mpc} \cdot \left[0,25'' \cdot \left(\frac{1^\circ}{3600''} \right) \cdot \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right) \right] = D \quad \therefore \mathbf{D = 1,94 \cdot 10^{-5} \text{ Mpc}}$$

c) Observando linhas de perfis parecidos, temos que **$\Delta\lambda = 20\text{\AA} = 2$ nm.**

d) Se as linhas entre $POS5$ e $POS6$ estão deslocadas em $20\text{\AA}$, e estes pontos estão em rotação em torno de $POS4$, podemos afirmar que o deslocamento Doppler, para cada uma das posições em movimento, é de $10\text{\AA}$. Isto pode ser corroborado com o espectro de $POS4$, cujas linhas de emissão se encontra entre as linhas deslocadas de $POS5$ e $POS6$. Desta maneira, usando a relação do Efeito Doppler e uma linha de referência de $POS4$ (no caso, foi usado $\lambda = 5030\text{\AA}$), temos que:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{10}{5030} = \frac{v}{3 \cdot 10^5} \quad \therefore \mathbf{v = 5,964 \cdot 10^2 \text{ km/s}}$$

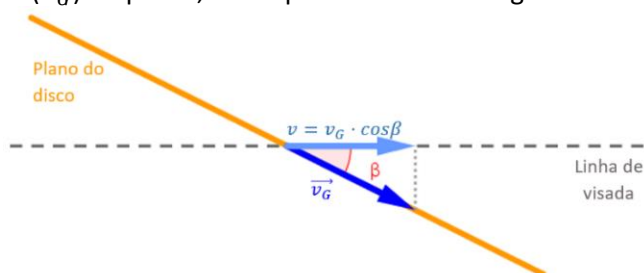
e) Admitindo que o módulo da força gravitacional de $POS4$ aplicada sobre um objeto de massa m em $POS5$ ou $POS6$ (que estão a uma distância r do buraco negro de massa M) é igual ao módulo da força centrípeta, temos a seguinte relação:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow M = \frac{rv^2}{G}$$

Como $r = 1,94 \cdot 10^{-5} \text{ Mpc} = 5,986 \cdot 10^{17} \text{ m}$ e $v = 5,964 \cdot 10^5 \text{ m/s}$, aplicando sobre a relação encontrada, temos que:

$$M = 5,986 \cdot 10^{17} \cdot \frac{(5,964 \cdot 10^5)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \quad \therefore \mathbf{M = 3,192 \cdot 10^{39} \text{ kg} = 1,604 \cdot 10^9 M_\odot}$$

f) Se o disco está inclinado em 35° em relação à linha de visada, a velocidade observada seria apenas uma componente da velocidade de rotação original (v_G) do ponto, como pode ser visto na figura abaixo:



$$\text{E como } v = v_G \cdot \cos 35^\circ \Rightarrow v_G = \frac{v}{\cos 35^\circ} = \frac{596,4}{\cos 35^\circ} \therefore v_G = 728,1 \text{ km/s}$$

Aplicando este novo valor no item anterior, temos que a massa M do buraco negro é de:

$$M = 5,986 \cdot 10^{17} \cdot \frac{(7,281 \cdot 10^5)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \therefore \mathbf{M = 4,758 \cdot 10^{39} \text{ kg} = 2,391 \cdot 10^9 M_\odot}$$

Isto é, estaríamos **errando para menos** na massa estimada do item anterior.

g) Existem duas possibilidades para resolver este problema: admitindo que o disco não está inclinado ou admitir que existe a inclinação de 35° , conforme citado no item anterior.

A Magnitude absoluta M_G pode ser determinada ao ser comparada com a magnitude absoluta do Sol ($M_\odot = +4,83$). Da relação entre fluxo e magnitude, temos que:

$$M_G - M_\odot = -2,5 \cdot \log \frac{F_G}{F_\odot}$$

Para a primeira situação, sem inclinação, temos que:

$$M_G - 4,83 = -2,5 \cdot \log \left(\frac{1,604 \cdot 10^9 F_\odot}{F_\odot} \right) \therefore M_G = -18,18$$

E a magnitude aparente (m_G), pode ser obtida pelo módulo de distância, onde d_{pc} a distância de M87 em parsecs.

$$m_G - M_G = 5 \cdot \log d_{pc} - 5 \Rightarrow m = -18,18 + 5 \cdot \log(16 \cdot 10^6) - 5 \therefore m_G = +12,84$$

Para a segunda situação, inclinação de 35° , temos que:

$$M_G - 4,83 = -2,5 \cdot \log \left(\frac{2,391 \cdot 10^9 F_\odot}{F_\odot} \right) \therefore M_G = -18,62$$

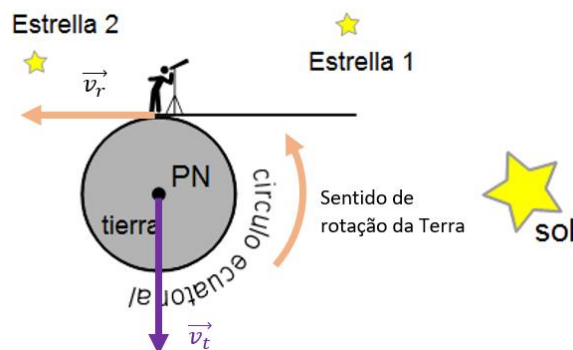
E, para a magnitude aparente:

$$m = -18,62 + 5 \cdot \log(16 \cdot 10^6) - 5 \therefore m_G = +12,40$$

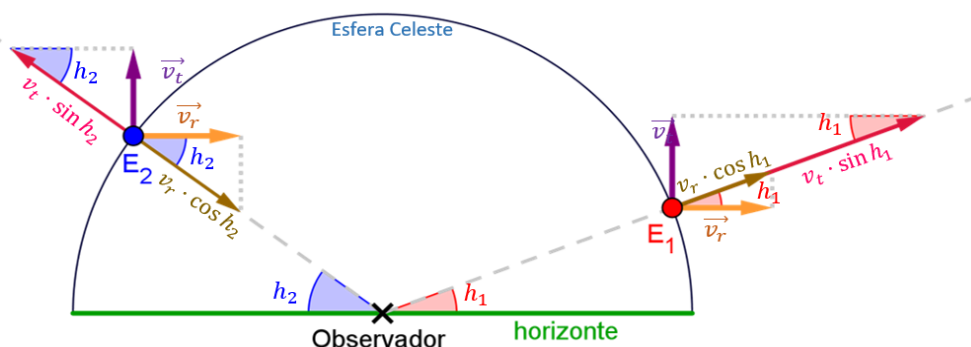
4) a) O Efeito Doppler causará o desvio das linhas observadas. Existem outros mecanismos que podem afetar a luz observada (como Espalhamento Rayleigh e refração atmosférica), mas nestes casos a luz emitida pode ser desviada ou absorvida ou espalhada.

b) O observador possui um movimento, composto pelos movimentos de rotação do planeta e da translação deste ao redor do Sol.

c) A figura abaixo mostra os vetores dos movimentos responsáveis pelos efeitos Doppler.



d) A figura a seguir mostra como o observador detecta, de acordo com sua linha de visada, os movimentos das estrelas E_1 e E_2 . Pelos dados do azimuth, sabemos que estas estrelas estão sobre o Meridiano Local do observador, em sentidos opostos do céu.



Tomando o observador como referencial em repouso, temos que os movimentos de rotação e translação (vetores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_t$, respectivamente) apresentam vetores com sentidos opostos. Entretanto, na linha de visada do observador (linhas tracejadas), ele só perceberá as componentes destes movimentos de acordo com a altura de cada estrela (h_1 e h_2). Desta forma, o vetor velocidade observada para E_1 e E_2 será:

$$\begin{cases} \text{Estrela 1: } \vec{v}_1 = v_r \cdot \cos h_1 \hat{i} + v_t \cdot \sin h_1 \hat{j} \\ \text{Estrela 2: } \vec{v}_2 = v_r \cdot \cos h_2 \hat{i} - v_t \cdot \sin h_2 \hat{j} \end{cases}$$

Como o módulo de um vetor é $v = \sqrt{(v_i)^2 + (v_j)^2}$, as fórmulas de desvio Doppler podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} = \frac{v_1}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_1)^2 + (v_t \cdot \sin h_1)^2}}{c} \\ \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} = \frac{v_2}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_2)^2 + (v_t \cdot \sin h_2)^2}}{c} \end{cases}$$

e) A partir da tabela do item anterior, temos os valores para $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$, h_1 e h_2 . Tomando como referência a linha de H α (656,3 nm), o sistema de equações do item anterior pode ser resolvido. Logo:

$$\begin{cases} \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} = \frac{v_1}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_1)^2 + (v_t \cdot \sin h_1)^2}}{c} \\ \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} = \frac{v_2}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_2)^2 + (v_t \cdot \sin h_2)^2}}{c} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{0,03840}{656,3} \cdot 3 \cdot 10^5 \right)^2 = (v_r \cdot \cos 35^\circ 10')^2 + (v_t \cdot \sin 35^\circ 10')^2 \\ \left(\frac{0,05291}{656,3} \cdot 3 \cdot 10^5 \right)^2 = (v_r \cdot \cos 55^\circ 7')^2 + (v_t \cdot \sin 35^\circ 7')^2 \end{cases}$$

Após alguns cálculos, obtém-se o seguinte sistema de equações, que levará as soluções de v_r e v_t :

$$\begin{cases} 308,1 = v_r^2 \cdot 0,6683 + v_t^2 \cdot 0,3317 \\ 584,9 = v_r^2 \cdot 0,3271 + v_t^2 \cdot 0,6729 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_r = 6,247 \text{ km/s} \\ v_t = 29,16 \text{ km/s} \end{cases}$$

f) Tomando o dia sideral como 23h 56min 4s ($\approx 8,616 \cdot 10^3$ s) e o ano sideral como 365 dias 6h 9min 10s ($\approx 3,156 \cdot 10^7$ s), para calcular a distância Terra-Sol, podemos obter a partir da velocidade média. Seja d_{TS} a distância média entre a Terra e o Sol, temos que:

$$v_t = \frac{2\pi \cdot d_{TS}}{\Delta t} \Rightarrow d_{TS} = \frac{v_t \cdot \Delta t}{2\pi} = \frac{29,16 \cdot 3,156 \cdot 10^7}{2\pi} \quad \therefore d_{TS} = 1,465 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Para o raio da Terra, considera-se a v_r como a velocidade de rotação do planeta no Equador terrestre. E, usando o mesmo conceito do cálculo anterior:

$$v_r = \frac{2\pi \cdot r_{\text{Terra}}}{\Delta t} \Rightarrow r_{\text{Terra}} = \frac{v_r \cdot \Delta t}{2\pi} = \frac{6,247 \cdot 8,616 \cdot 10^3}{2\pi} \quad \therefore r_{\text{Terra}} = 8,566 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Nota: embora o raio calculado seja 2 000 km maior que o raio terrestre (6 371 km), este método mostra-se razoável para determinar o raio do planeta

g) Como a Terra está sujeita a força de atração gravitacional causada pelo Sol, esta fica presa a uma órbita circular. Igualando a aceleração gravitacional com a aceleração centrípeta, temos que:

$$\frac{GM_{\odot}}{d_{TS}^2} = \frac{v_t^2}{d_{TS}} \Rightarrow v_t^2 = \frac{GM}{d_{TS}} \Rightarrow M_{\odot} = \frac{d_{TS} v_t^2}{G} = \frac{1,465 \cdot 10^{11} \cdot (2,916 \cdot 10^4)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow$$

$$\therefore M_{\odot} = 1,87 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$