



Folha de Instruções

Prova Teórica Individual

IMPORTANTE

ABRA O ENVELOPE DE EXAME ATÉ QUE SEJA AUTORIZADO.

DESOBEDECER ESTA INSTRUÇÃO RESULTARÁ NA DESCLASSIFICAÇÃO IMEDIATA.

1. Duração: **2 horas**. Trabalhe **individualmente, em completo silêncio e siga as instruções dos supervisores**. Qualquer violação pode resultar em advertências, medidas adicionais ou desclassificação.
2. Em sua área de trabalho, você encontrará esta **Folha de Instruções, 5 Cartões de Cores (Branco, para Papel; Laranja, para Perguntas; Azul, para Água; Verde, para Banheiro; Vermelho, para Ajuda) e um Envelope de Exame contendo: a Prova Teórica Individual, 8 Folhas de Respostas, 2 Formulários de Perguntas e Respostas**.
3. Durante a prova, será anunciado quando terminar o tempo para perguntas e quando faltarem 30 minutos e 5 minutos.
4. Escreva suas respostas nas **Folhas de Respostas**. Se precisar de mais papel, solicite levantando o cartão branco. **Cada folha deve incluir: seu código de participante, o número do problema, a indicação de que é da Prova Teórica Individual e o número da página. Responda apenas um problema por folha; não combine dois ou mais problemas na mesma folha. Não escreva no verso das folhas.**
5. **Somente durante os primeiros 60 minutos da prova, você pode enviar perguntas por escrito ao Comitê Científico**. As perguntas devem ser escritas nos **Formulários de Perguntas e Respostas**. Uma vez que sua pergunta esteja pronta, levante o cartão laranja para que um supervisor a recolha e entregue ao Comitê Científico. O Comitê decidirá se a pergunta será respondida. A resposta será comunicada ao participante. Dependendo do número de perguntas, o processo pode levar algum tempo.
6. Se precisar de água, ir ao banheiro (não permitido nos primeiros ou últimos 30 minutos da competição) ou de ajuda, use os cartões azul, verde e vermelho, respectivamente.
7. Quando o término da prova for anunciado, pare de trabalhar imediatamente. Organize seu trabalho por problema e coloque as respostas no **Envelope de Exame**. **Todas as folhas que não estiverem dentro do Envelope de Prova serão descartadas e não revisadas.** Permaneça sentado e em silêncio até que os supervisores recolham todos os **Envelopes de Exame**.
8. Se terminar seu trabalho nos primeiros 90 minutos (antes dos últimos 30 minutos) e desejar sair, levante o cartão vermelho para informar os supervisores. **Após sair da sala de prova, não será permitido retornar**. Não é permitido deixar o local durante os primeiros ou últimos 30 minutos da prova.
9. Você só pode levar os materiais que trouxe em sua bolsa plástica. **Não é permitido levar nenhuma parte da prova, folhas de respostas, formulários de perguntas e respostas, folhas de instruções ou cartões de cores.**

Boa sorte!

Prova Teórica Grupal

Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica

Costa Rica 2024



Total de pontos: 70 pontos

Nota:

Ao longo do exame, espaço é usado para separar milhares e vírgulas para decimais. Ao longo de um problema podem ser usados resultados obtidos em itens anteriores.

Problema 1: 10 Pts

O perfil de intensidade radial de uma galáxia, segundo Sérsic, é escrito:

$$\log_{10} \left[\frac{I(r)}{I_e} \right] = -b_n \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right],$$

onde I_e é a intensidade efetiva em um raio r_e , que envolve 50 % da luz e b_n é um parâmetro relacionado à forma, $b_n = 1,999n - 0,3271$, $1 < n < 10$. No caso do disco de galáxias espirais, está bem descrito quando $n = 1$, enquanto no caso do bojo está bem descrito quando $n = 4$.

Suponha que a área estudada e a área associada à área efetiva sejam iguais.

- Encontre a expressão para a diferença entre a magnitude absoluta e a magnitude efetiva M_e em função de r e r_e para o disco. **5 Pts**
- Encontre a expressão para a diferença entre a magnitude absoluta e a magnitude efetiva M_e em função de r e r_e para o bojo. **5 Pts**

Problema 2: 15 Pts

Um grupo de jovens latino-americanos deseja observar a estrela Vega em uma noite clara a partir de uma cidade localizada na latitude de $\phi = +40^\circ$. Sabendo que Vega tem uma ascensão reta de 18 horas e uma declinação de $\delta = +38^\circ$, determine

- Qual será o ângulo horário de Vega às 22:00 TU (Tempo Universal) se a hora sideral local (TSL) naquele momento for 16 horas? **5 pontos**
- A que horas Vega cruza o meridiano local em TU? **5 pontos**
- Calcule a altura da estrela Vega no momento da observação. **5 pontos**

Problema 3: 20 Pts

Contexto inicial:

A partir da análise da figura 1, que mostra o espectro de uma remanescente de uma explosão estelar, gerado pela presença de elétrons que viajam próximos da velocidade da luz. Ao interagir com campos magnéticos e a radiação antiga do universo, estes elétrons produzem radiação que abrangem um espectro desde a banda de rádio até radiação gama. Os cientistas interpretam este espectro como um mensageiro oculto, decifrando a trajetória dos elétrons e da quantidade de energia que possuem. Este processo nos conecta com a dramática história do nascimento e morte das estrelas.

A figura 1 apresenta um modelo para explicar o espectro térmico da remanescente de supernova RCW 86, proposto por M. Ajello et al., 2016, Apj, 89, 98. É apresentada a distribuição espectral de energia (SED), que é igual ao produto do quadrado da energia dos fótons multiplicado pelo espectro diferencial $\frac{dN}{dE}$ em função da energia dos fótons detectados. Este modelo é conhecido como modelo “leptônico”, porque é considerado que a radiação é produzida por elétrons relativísticos que obtêm grande quantidade de energia da onda de choque da remanescente. Grande parte da radiação detectada deste objeto, segundo o modelo, é devida à radiação síncrotron (da banda de rádio até os raios X) dos elétrons em um campo magnético - o que corresponde à “corcova” no lado esquerdo da figura. Os mesmos elétrons que produzem a radiação Síncrotron também produzem esta “corcova” à direita na Distribuição Espectral mostrada (raios gama de altíssima energia), devido ao espalhamento Compton inverso de fótons da Radiação Cósmica de Fundo em Microondas, que ganham energia ao se chocar com os já ditos elétrons. Desta forma, por exemplo, os elétrons que produzem os fótons no pico do espectro síncrotron $E^2 \frac{dN}{dE}$, também produzem os fótons no pico na região de altas energias $E^2 \frac{dN}{dE}$.

De acordo com a Teoria de interação com a onda de choque, a distribuição espectral dos elétrons relativísticos (número de elétrons por unidade de energia) é descrita por uma Lei de potência da forma

$$F \propto \epsilon^{-p},$$

até um valor máximo de energia das partículas, a partir da qual F começa a decair rapidamente (esta energia máxima poderia ser definida pelo fato de que os elétrons não tiveram tempo suficiente para alcançar energias maiores, ou porque a mesma radiação que é produzida ocorre a uma taxa maior comparada com a taxa que ocorre ganho de energia, ou porque começaram a escapar da fonte).

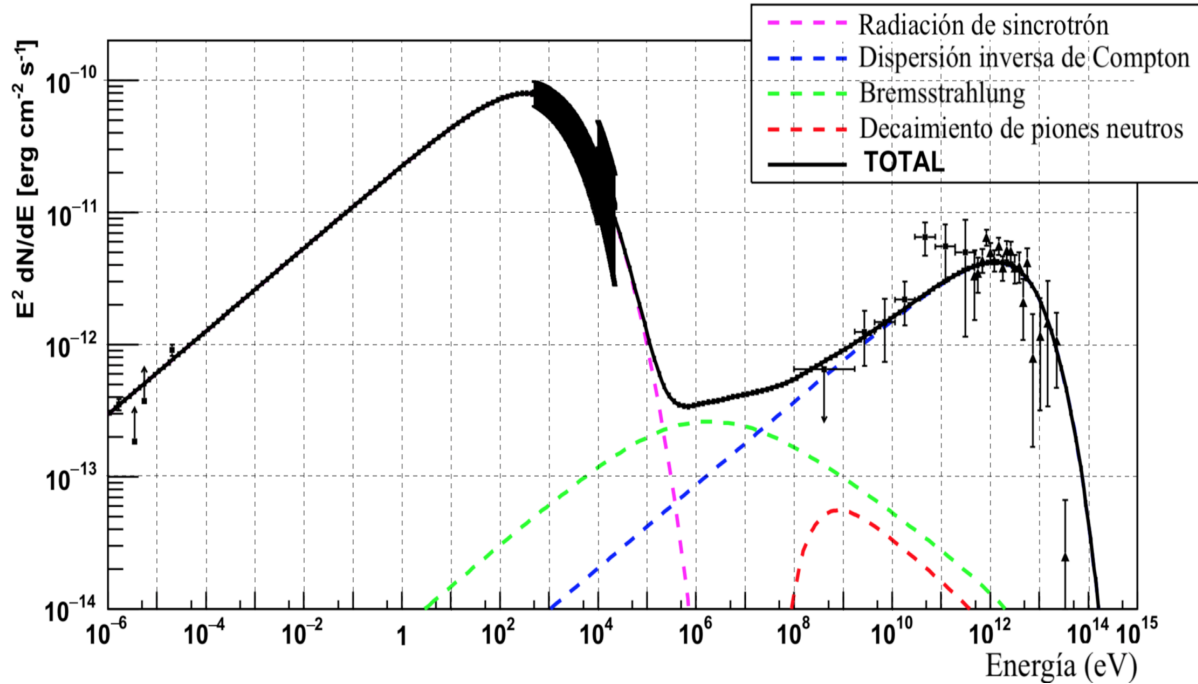


Figura 1: Distribuição espectral de energia de RCW 86 medida desde bandas de radio até raios gamma de altíssima energia (adaptada de M. Ajello et al., 2016, ApJ, 819, 98.), e o modelo “lep-tônico”.

Considere:

O valor teórico de p descrito no caso mais simples (sem levar em conta efeitos não lineares) é $p = 2$. A forma de F se reflete na distribuição espectral dos fótons produzidos, pois é possível demonstrar que, tanto o espectro síncroton como a radiação via Compton Inverso (fluxo de fótons por unidade de área, tempo e energia) dependem da energia dos fótons segundo a expressão

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-(p+1)/2},$$

em pelo menos uma banda de energia abaixo da energia máxima (antes do máximo da distribuição espectral de energia).

- A partir do espectro mostrado na figura, estime o valor de p e compare-o com o valor teórico. **5 Pts**
- De acordo com as equações de Maxwell do eletromagnetismo, a energia máxima de um fóton síncroton típico emitido por um elétron com energia ϵ em um campo magnético B é dado por

$$E_m \sim (1,93 \text{ keV}) \left(\frac{\epsilon}{100 \text{ TeV}} \right)^2 \left(\frac{B}{10 \mu\text{G}} \right).$$

O valor médio do campo magnético na zona onde estão os elétrons relativísticos é $B \sim 10 \mu\text{G}$. Usando este valor para o campo magnético, estime o valor da energia dos elétrons em TeV que produzem um fluxo de energia máximo síncroton em RCW 86. **5 Pts**

- c) Como foi explicado, no modelo leptônico os raios gama são produzidos por interações dos elétrons relativísticos com radiação de corpo negro de Planck a uma temperatura $T = 2,73 \text{ K}$ (radiação cósmica de fundo, RCF). Usando relatividade restrita é possível demonstrar que a relação entre a energia típica de um fóton espalhado (E_f) e sua energia inicial antes de interagir com um elétron (E_i), ambas medidas no referencial do observador, é

$$E_f \approx \gamma^2 E_i ,$$

onde γ é o fator de Lorentz do elétron espalhado. Considerando que a energia típica de um fóton de RCF é $k_B T$, e usando o resultado do item anterior, calcule a energia (em TeV) onde ocorre o máximo da distribuição espectral dos raios gama, e compare o resultado com as observações. **10 Pts**

Dados e informações necessárias:

- Constante de Boltzmann: $k_B = 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
- Massa do elétron em repouso: $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$.
- Energia relativística dos elétrons: $E = \gamma mc^2$.

Problema 4: 25 Pts

O estudo da evolução de sistemas estelares binários ganhou muita importância na última década devido à descoberta das ondas gravitacionais. No entanto, esses sistemas são estudados há muito tempo. Neste exercício, exploraremos o que pode acontecer a um sistema binário compacto quando a estrela mais massiva sofre uma explosão de supernova, sob um modelo simplificado conhecido como *modelo de perda instantânea de massa*.

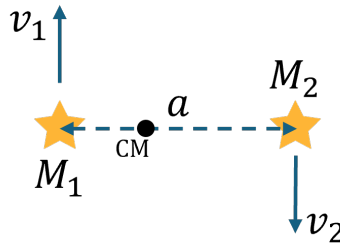


Figura 2: Sistema binário antes da explosão.

Começaremos com um sistema de duas estrelas de massas M_1 e M_2 , orbitando seu centro de massa (CM). $\mathcal{O}$ denota o referencial que está em repouso em relação ao CM antes da explosão. Diremos que em relação a $\mathcal{O}$, M_1 tem uma velocidade imediatamente antes da explosão de v_1 , enquanto M_2 tem uma velocidade imediatamente antes da explosão de v_2 . Além disso, definiremos o valor:

$$v_{orb}^2 = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a}$$

como a velocidade orbital relativa do sistema, onde a é a maior separação do sistema. Para simplificar os cálculos, assumiremos que as massas imediatamente antes da explosão têm uma separação de a .

Logo após a explosão da supernova, como a perda de massa da estrela é aproximada como instantânea, suponha que no lugar da estrela de massa M_1 , permaneça um objeto compacto de massa M_{1f} , e ambos M_{1f} e M_2 mantêm as velocidades e a separação que tinham antes da explosão. O referencial que está em repouso em relação ao novo centro de massa CM' entre M_{1f} e M_2 também é denotado como $\mathcal{O}'$.

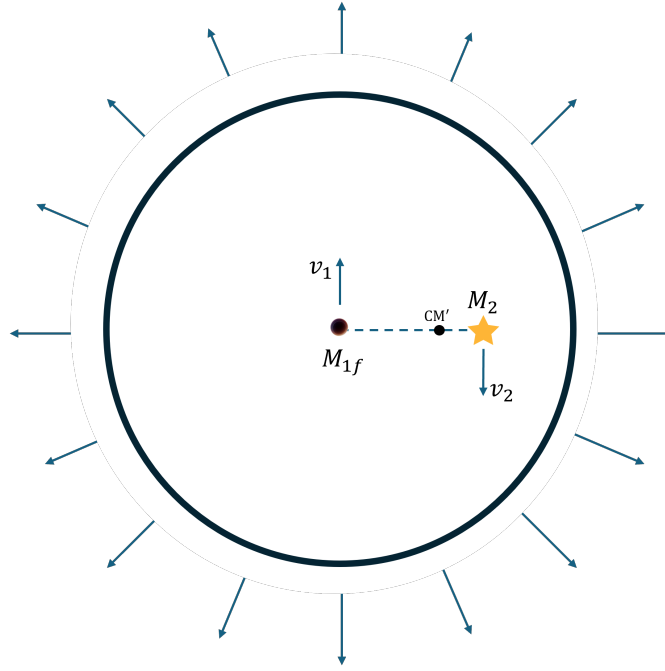


Figura 3: Sistema binário depois da explosão.

- a) Mostre que, visto desde $\mathcal{O}$, as velocidades v_1 e v_2 cumprem que: **7 Pts**

$$v_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} v_{orb} ,$$

$$v_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_{orb} .$$

- b) Mostre que a velocidade de CM' após a explosão, desde $\mathcal{O}$, cumpre que: **5 Pts**

$$\vec{v}_{CM'} = -\frac{\Delta M}{M_{1f} + M_2} \vec{v}_1 ,$$

onde ΔM é a massa perdida por M_1 durante a explosão.

- c) Encontre a energia mecânica do sistema binário depois da explosão em $\mathcal{O}'$ e mostre que se pode simplificar da forma: **9 Pts**

$$E_f = -\frac{GM_{1f}M_2}{2a}(2 - \tilde{m}) ,$$

onde

$$\tilde{m} = \frac{M_1 + M_2}{M_{1f} + M_2}.$$

- d) A partir dos resultados anteriores, encontre qual a maior percentagem de massa que o sistema binário pode perder e, ao mesmo tempo, permanecer ligado gravitacionalmente. **4**

Pts



Formulario de Preguntas y Respuestas

Formulários de Perguntas e Respostas

Código de Estudiante/Código do Estudante: _____

Número de Problema/Número do problema: _____

Pregunta/Pergunta

Respuesta/Resposta

Hoja de Soluciones/Folha de Soluções

Examen Teórico Individual/Exame Teórico Individual ☐

Examen Teórico Grupal/Exame teórico em grupo ☐

Código de Participante/Código do participante: _____

Número de Problema/Número do problema: _____

Número de Página/Número da Página: _____

Total de Páginas/Total de Páginas: _____



OLAA

Costa Rica 2024