



Hoja de Instrucciones

Examen Teórico Individual

IMPORTANTE

**NO ABRA LA CARPETA DE EXAMEN HASTA QUE SE LE INDIQUE.
DESOBEDECER ESTA INSTRUCCIÓN SERÁ MOTIVO DE DESCALIFICACIÓN INMEDIATA.**

1. Duración: **2 horas**. Trabaje **individualmente, en completo silencio y siga las instrucciones de los supervisores**. Cualquier violación puede resultar en advertencias, medidas adicionales o descalificación.
2. En su zona de trabajo encontrará esta **Hoja de Instrucciones, 5 Tarjetas de Colores (Blanca, para Papel; Naranja, para Preguntas; Azul, para Agua; Verde, para Baño; Roja, para Ayuda) y Un Sobre de Examen que contiene: El examen Teórico Individual, 8 Hojas de Soluciones, 2 Formularios de Preguntas y Respuestas**.
3. Durante el examen se anunciará cuando haya terminado el tiempo de preguntas y cuando falten 30 minutos y 5 minutos.
4. Escriba sus respuestas en las **Hojas de Soluciones**. Si necesita más papel, solicítelo levantando la tarjeta blanca. **Cada hoja debe incluir: su código de participante, el número del problema e indicar que es del Examen Teórico Individual, y el número de página. Responda únicamente un problema por hoja; no combine dos o más problemas en la misma hoja. No escriba en el reverso de las hojas.**
5. **Solo durante los primeros 60 minutos del examen puede enviar preguntas escritas al Comité Científico**. Las preguntas deben escribirse en los **Formularios de Preguntas y Respuestas**. Una vez que su pregunta esté lista, levante la tarjeta naranja para que un supervisor la recoja y la entregue al Comité Científico. El Comité Científico decidirá si la pregunta será respondida. La respuesta será comunicada al participante. Dependiendo del número de preguntas, el proceso puede tomar algo de tiempo.
6. Si necesita agua, ir al baño (esto no está permitido durante los primeros o últimos 30 minutos del concurso), o requiere ayuda, utilice la tarjeta azul, verde y roja, respectivamente.
7. Una vez que se anuncie el final del examen, deje de trabajar inmediatamente. Organice su trabajo por problema y coloque las soluciones en el **Sobre de Examen**. **Todas las hojas que no estén dentro del Sobre de Examen serán descartadas y no revisadas.** Permanezca sentado y en silencio hasta que los supervisores recojan todas las **Sobres de Examen**.
8. Si termina su trabajo durante los primeros 90 minutos (antes de los últimos 30 minutos) y desea salir, muestre su tarjeta roja para informar a los supervisores que desea terminar. **Después de abandonar el recinto de examen, no podrá regresar.** No se permite abandonar el recinto durante los primeros ni últimos 30 minutos del examen.
9. Solo puede llevarse los materiales que trajo en su bolsa plástica. **No está permitido llevarse ninguna parte del examen, hojas de soluciones, formularios de preguntas y respuestas, hojas de instrucciones ni tarjetas de colores.**

¡Muchos éxitos!

Prueba Teórica Individual

Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica

Costa Rica 2024



Puntaje total: 65 puntos

Nota:

A lo largo del examen, se utiliza espacio para la separación de los miles, y coma para los decimales.

Problema 1: 10 Pts

En la astronomía extragaláctica se han encontrado múltiples relaciones que nos permiten intuir propiedades de diferentes tipo de galaxia. Para las de tipo temprano, tenemos por ejemplo la relación radio luminosidad:

$$\log_{10}(R_{25}) = -0,249M_B - 4,00$$

que relaciona la magnitud absoluta de la banda B (M_B) y el radio R_{25} en kilopársecs donde se tiene un brillo superficial de $25 \text{ mag} \cdot \text{arcseg}^{-2}$, y la relación Tully Fisher que cambia para diferentes tipos de galaxias tipo temprano. Para sistemas Sa,

$$M_B = 3,15 - 9,95 \log_{10}(v_{\max}),$$

para sistemas Sb,

$$M_B = 2,71 - 10,2 \log_{10}(v_{\max}),$$

y para sistemas Sc,

$$M_B = 3,31 - 11,0 \log_{10}(v_{\max}).$$

Donde $v_{\max}$ se encuentra en km/s. NGC 2997 es una galaxia espiral no barrada tipo Sc, localizada en la constelación Antlia y descubierta en 1793. Tiene una magnitud absoluta asociada al máximo de velocidad de $-12,6$ y se supondrá que este valor corresponde a la banda-B.

- Determine el radio del disco en kilopársecs donde el nivel superficial de brillo es $25 \text{ mag} \cdot \text{arcseg}^{-2}$. **3 Pts**
- Estime el máximo de la velocidad de rotación de esta galaxia en km/s. **3 Pts**
- ¿Cuál es la rapidez angular de la galaxia en rad/s? **4 Pts**

Problema 2: 15 Pts

Venus es uno de los planetas interiores del Sistema Solar, lo que significa que nunca se ve muy lejos del Sol en el cielo.

Considere las distancias promedio de los planetas al Sol, que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Distancias promedio de los planetas al Sol.

Planeta	Radio orbital (UA)
Mercurio	0,4
Venus	0,7
Tierra	1,0
Marte	1,5
Júpiter	5,2
Saturno	9,5
Urano	19,2
Neptuno	30,1

Determine

- la máxima elongación hacia el este de Venus respecto a la Tierra en grados. **5 Pts**
- el tiempo en días que le toma a Venus volver a estar en la misma elongación. **5 Pts**
- ¿en qué momento es visible para esa elongación? **5 Pts**

Problema 3: 15 Pts

Supongamos un cúmulo estelar que contiene $N = 230$ estrellas. Suponga que cada estrella tiene la masa del Sol y que la separación entre cada par de estrellas es, en promedio, igual a dos parsecs.

- Encuentre la expresión para la energía potencial promedio del sistema, $\langle U \rangle$, y calcule su valor en Joules. Considere que hay $N(N - 1)/2$ pares de estrellas. **7 Pts**

- b) El teorema del virial establece que la suma de las energías cinéticas de las estrellas es igual a $-0,5 \langle U \rangle$ (esto se garantiza en un sistema con cierta estabilidad gravitacional). Estime la velocidad típica de las estrellas dentro del cúmulo en m/s. **5 Pts**
- c) Calcule la velocidad de escape en m/s a una distancia de dos parsecs del centro del cúmulo. La estabilidad garantizada por el teorema del virial debe dar una velocidad típica menor a la velocidad de escape. **3 Pts**

Datos necesarios:

- La masa del Sol: $1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$
- La constante gravitacional: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
- $1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$

Problema 4: 25 Pts

Un evento muy importante en la historia de la astronomía fue la utilización de los tránsitos de Venus de 1761 y 1769 para medir la distancia entre el Sol y la Tierra. La razón por la cual el tránsito de Venus puede utilizarse para estimar esta distancia es porque, desde dos puntos diferentes en la Tierra, la silueta de Venus en el Sol se estaría proyectando en dos lugares diferentes. Lograr medir esta diferencia angular de paralaje sería la clave para poder medir la distancia entre el Sol y la Tierra. En este ejercicio, resolveremos un modelo simplificado del que fue utilizado en ese entonces. Para iniciar, vamos a suponer que los centros del Sol, Venus y la Tierra se encuentran colineales, y que las órbitas de Venus y la Tierra son circulares.

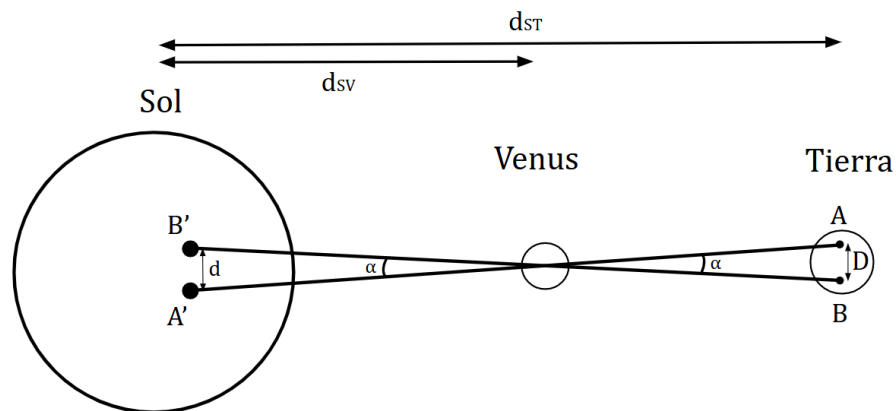


Figura 1: Esquema del paralaje simplificado.

Si bien esto suena muy sencillo, en la realidad esto resulta ser mucho más complicado debido a que la Tierra no es lo suficientemente grande como para que esta diferencia en la posición de la silueta de Venus sea apreciable a simple vista. Por este motivo, lo que se mide es el tiempo que le toma a Venus cruzar el Sol desde ambos puntos en la Tierra. Si bien la diferencia angular entre ambas siluetas no es apreciable, la diferencia temporal en atravesar el Sol sí es algo medible y se puede utilizar para encontrar el valor del ángulo α en la Figura 1.

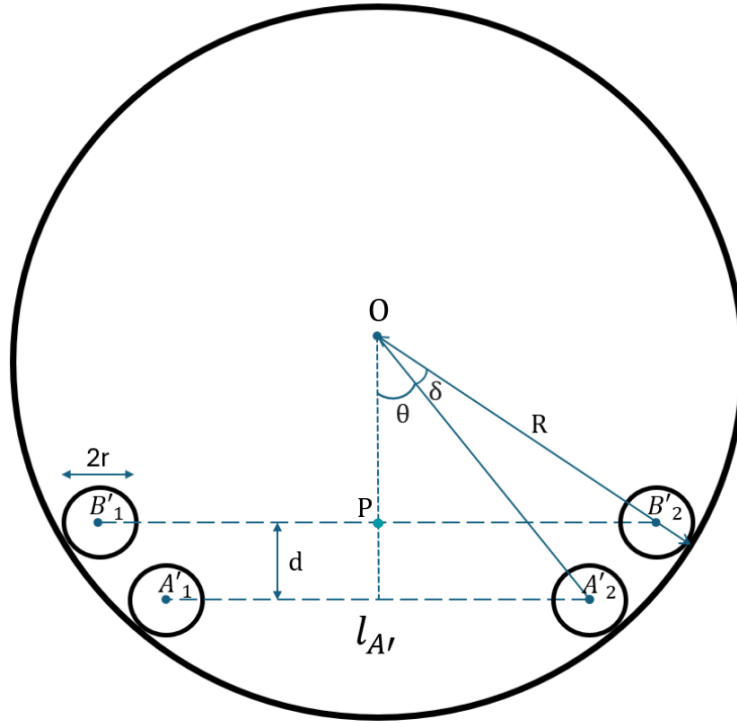


Figura 2: Diagrama de los tránsitos de Venus vistos desde los puntos A y B en la Tierra.

La Figura 2 representa los dos tránsitos de Venus, de radio r , en el Sol de radio R . Visto desde A, la silueta hace una ruta de longitud $l_{A'}$ desde el extremo A'_1 hasta A'_2 . En cambio, visto desde B, la ruta aparente va desde B'_1 hasta B'_2 y es de longitud $l_{B'}$. Como se puede apreciar en la Figura 2, el ángulo $\angle POA'_2$ es de θ , mientras que el ángulo $\angle POB'_2$ tiene un valor de $\theta + \delta$, donde δ es un ángulo muy pequeño.

Nota importante: Para efectos del problema, el ángulo pequeño quiere decir que se usará la aproximación $\cos \delta \approx 1$. Tome también que:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$,
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

- a) Si el punto A se encuentra a una latitud de 30°N y el punto B a una latitud de 30°S , encuentre la distancia lineal D entre los puntos A y B en la Tierra. Suponga que ambos puntos se encuentran en la misma longitud y que el radio de la Tierra es de 6 371 km. **5 Pts**
- b) Muestre que la distancia d entre las trayectorias en la Figura 2 cumple que **5 Pts**

$$d \approx (R - r) \sin \theta \sin \delta.$$

- c) Muestre que la diferencia de tiempo Δt entre las trayectorias cumple que

$$v\Delta t \approx 2(R - r) \cos \theta \sin \delta,$$

donde v es la rapidez de la silueta de Venus. **5 Pts**

d) Demuestre que, partiendo de los resultados anteriores, que

$$d \approx (R - r) \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \frac{\Delta t}{t_{A'}},$$

donde $t_{A'}$ es el tiempo que le toma a la silueta de Venus recorrer la trayectoria vista desde A. **5 Pts**

Esto nos permite relacionar d con el radio del Sol, el radio de Venus, y cantidades que son posibles medir desde la Tierra como el ángulo θ y los tiempos de tránsito. El siguiente obstáculo con el cual nos encontramos es no tener (en la época) mediciones claras del radio del Sol y del radio de Venus.

Si partimos de que los ángulos que hacen el Sol y Venus en la bóveda celeste son lo suficientemente pequeños, podemos relacionar ángulos en lugar de distancias porque tanto la silueta como el Sol se encuentran a la misma distancia de la Tierra, y concluir que

$$\alpha \approx (\theta_S - \theta_V) \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \frac{\Delta t}{t_{A'}},$$

donde θ_S y θ_V son los radios angulares del Sol y Venus en el cielo, respectivamente.

e) Con ayuda de la Tabla 2, proceda a dar una estimación de la distancia entre la Tierra y el Sol en kilómetros. **5 Pts**

Tabla 2: Datos importantes para la estimación de la distancia entre la Tierra y el Sol. T_V y T_T son el periodo orbital de Venus y la Tierra, respectivamente.

Datos	Valores
θ_S	950 arcseg
θ_V	28,8 arcseg
θ	56,23°
$t_{A'}$	19 790,5 s
$t_{B'}$	529 s
T_V	224,70 días
T_T	365,2563 días



Formulario de Preguntas y Respuestas

Formulários de Perguntas e Respostas

Código de Estudiante/Código do Estudante: _____

Número de Problema/Número do problema: _____

Pregunta/Pergunta

Respuesta/Resposta

Hoja de Soluciones/Folha de Soluções

Examen Teórico Individual/Exame Teórico Individual ☐

Examen Teórico Grupal/Exame teórico em grupo ☐

Código de Participante/Código do participante: _____

Número de Problema/Número do problema: _____

Número de Página/Número da Página: _____

Total de Páginas/Total de Páginas: _____



Costa Rica 2024