



# Folha de Instruções

## Exame Teórico em Grupo

### **IMPORTANTE**

**NÃO ABRA O ENVELOPE DO EXAME ATÉ QUE RECEBA ORIENTAÇÕES.  
DESCUMPRIR ESTA INSTRUÇÃO SERÁ MOTIVO DE DESCLASSIFICAÇÃO IMEDIATA.**

1. **Duração:** 2 horas. Trabalhe apenas com seu grupo e siga as instruções dos supervisores. Qualquer violação pode resultar em advertências, medidas adicionais ou desclassificação.
2. Na sua área de trabalho, você encontrará esta **Folha de Instruções, 5 Cartões Coloridos (Branco, para Papel; Laranja, para Perguntas; Azul, para Água; Verde, para Banheiro; Vermelho, para Ajuda) e um Envelope do Exame contendo: O Exame Teórico em Grupo, 12 Folhas de Resolução, 2 Formulários de Perguntas e Respostas.**
3. Durante o exame, será anunciado quando terminar o tempo para perguntas e quando restarem 30 minutos e 5 minutos.
4. Escrevam suas respostas nas **Folhas de Resolução**. Se precisar de mais papel, solicite levantando o cartão branco. Cada folha deve incluir: seu código de grupo, o número do problema, a indicação de que é do Exame Teórico em Grupo e o número da página. Responda apenas um problema por folha; não combine dois ou mais problemas na mesma folha. Não escreva no verso das folhas.
5. **Solo durante los primeros 60 minutos del examen puede enviar preguntas escritas al Comité Científico.** Las preguntas deben escribirse en los **Formularios de Preguntas y Respuestas**. Una vez que su pregunta esté lista, levante la tarjeta naranja para que un supervisor la recoja y la entregue al Comité Científico. El Comité Científico decidirá si la pregunta será respondida. La respuesta será comunicada al participante. Dependiendo del número de preguntas, el proceso puede tomar algo de tiempo.
6. Si necesita agua, ir al baño (esto no está permitido durante los primeros o últimos 30 minutos del concurso), o requiere ayuda, utilice la tarjeta azul, verde y roja, respectivamente.
7. Una vez que se anuncie el final del examen, dejen de trabajar inmediatamente. Organicen su trabajo por problema y coloque las soluciones en el **Sobre de Examen**. **Todas las hojas que no estén dentro del Sobre de Examen serán descartadas y no revisadas.** Permanezca sentado y en silencio hasta que los supervisores recojan todos los **Sobres de Examen**.
8. Si terminan su trabajo durante los primeros 90 minutos (antes de los últimos 30 minutos) y desean salir, muestren su tarjeta roja para informar a los supervisores que desean terminar. **Después de abandonar el recinto de examen, no podrán regresar.** No se permite abandonar el recinto durante los primeros ni últimos 30 minutos del examen.
9. Solo pueden llevarse los materiales que trajeron en sus bolsas plásticas. **No está permitido llevarse ninguna parte del examen, hojas de soluciones, formularios de preguntas y respuestas, hojas de instrucciones ni tarjetas de colores.**

¡Muchos éxitos!

# Prova Teórica Grupal

Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica

Costa Rica 2024



Total de pontos: 70 pontos

## Nota:

Ao longo do exame, espaço é usado para separar milhares e vírgulas para decimais. Ao longo de um problema podem ser usados resultados obtidos em itens anteriores.

## Problema 1: 10 Pts

O perfil de intensidade radial de uma galáxia, segundo Sérsic, é escrito:

$$\log_{10} \left[ \frac{I(r)}{I_e} \right] = -b_n \left[ \left( \frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right],$$

onde  $I_e$  é a intensidade efetiva em um raio  $r_e$ , que envolve 50 % da luz e  $b_n$  é um parâmetro relacionado à forma,  $b_n = 1,999n - 0,3271$ ,  $1 < n < 10$ . No caso do disco de galáxias espirais, está bem descrito quando  $n = 1$ , enquanto no caso do bojo está bem descrito quando  $n = 4$ .

Suponha que a área estudada e a área associada à área efetiva sejam iguais.

- Encontre a expressão para a diferença entre a magnitude absoluta e a magnitude efetiva  $M_e$  em função de  $r$  e  $r_e$  para o disco. **5 Pts**
- Encontre a expressão para a diferença entre a magnitude absoluta e a magnitude efetiva  $M_e$  em função de  $r$  e  $r_e$  para o bojo. **5 Pts**

## Problema 2: 15 Pts

Um grupo de jovens latino-americanos deseja observar a estrela Vega em uma noite clara a partir de uma cidade localizada na latitude de  $\phi = +40^\circ$ . Sabendo que Vega tem uma ascensão reta de 18 horas e uma declinação de  $\delta = +38^\circ$ , determine

- Qual será o ângulo horário de Vega às 22:00 TU (Tempo Universal) se a hora sideral local (TSL) naquele momento for 16 horas? **5 pontos**
- A que horas Vega cruza o meridiano local em TU? **5 pontos**
- Calcule a altura da estrela Vega no momento da observação. **5 pontos**

## Problema 3: 20 Pts

### Contexto inicial:

A partir da análise da figura 1, que mostra o espectro de uma remanescente de uma explosão estelar, gerado pela presença de elétrons que viajam próximos da velocidade da luz. Ao interagir com campos magnéticos e a radiação antiga do universo, estes elétrons produzem radiação que abrangem um espectro desde a banda de rádio até radiação gama. Os cientistas interpretam este espectro como um mensageiro oculto, decifrando a trajetória dos elétrons e da quantidade de energia que possuem. Este processo nos conecta com a dramática história do nascimento e morte das estrelas.

A figura 1 apresenta um modelo para explicar o espectro térmico da remanescente de supernova RCW 86, proposto por M. Ajello et al., 2016, Apj, 89, 98. É apresentada a distribuição espectral de energia (SED), que é igual ao produto do quadrado da energia dos fótons multiplicado pelo espectro diferencial  $\frac{dN}{dE}$  em função da energia dos fótons detectados. Este modelo é conhecido como modelo “leptônico”, porque é considerado que a radiação é produzida por elétrons relativísticos que obtêm grande quantidade de energia da onda de choque da remanescente. Grande parte da radiação detectada deste objeto, segundo o modelo, é devida à radiação síncrotron (da banda de rádio até os raios X) dos elétrons em um campo magnético - o que corresponde à “corcova” no lado esquerdo da figura. Os mesmos elétrons que produzem a radiação Síncrotron também produzem esta “corcova” à direita na Distribuição Espectral mostrada (raios gama de altíssima energia), devido ao espalhamento Compton inverso de fótons da Radiação Cósmica de Fundo em Microondas, que ganham energia ao se chocar com os já ditos elétrons. Desta forma, por exemplo, os elétrons que produzem os fótons no pico do espectro síncrotron  $E^2 \frac{dN}{dE}$ , também produzem os fótons no pico na região de altas energias  $E^2 \frac{dN}{dE}$ .

De acordo com a Teoria de interação com a onda de choque, a distribuição espectral dos elétrons relativísticos (número de elétrons por unidade de energia) é descrita por uma Lei de potência da forma

$$F \propto \epsilon^{-p},$$

até um valor máximo de energia das partículas, a partir da qual  $F$  começa a decair rapidamente (esta energia máxima poderia ser definida pelo fato de que os elétrons não tiveram tempo suficiente para alcançar energias maiores, ou porque a mesma radiação que é produzida ocorre a uma taxa maior comparada com a taxa que ocorre ganho de energia, ou porque começaram a escapar da fonte).

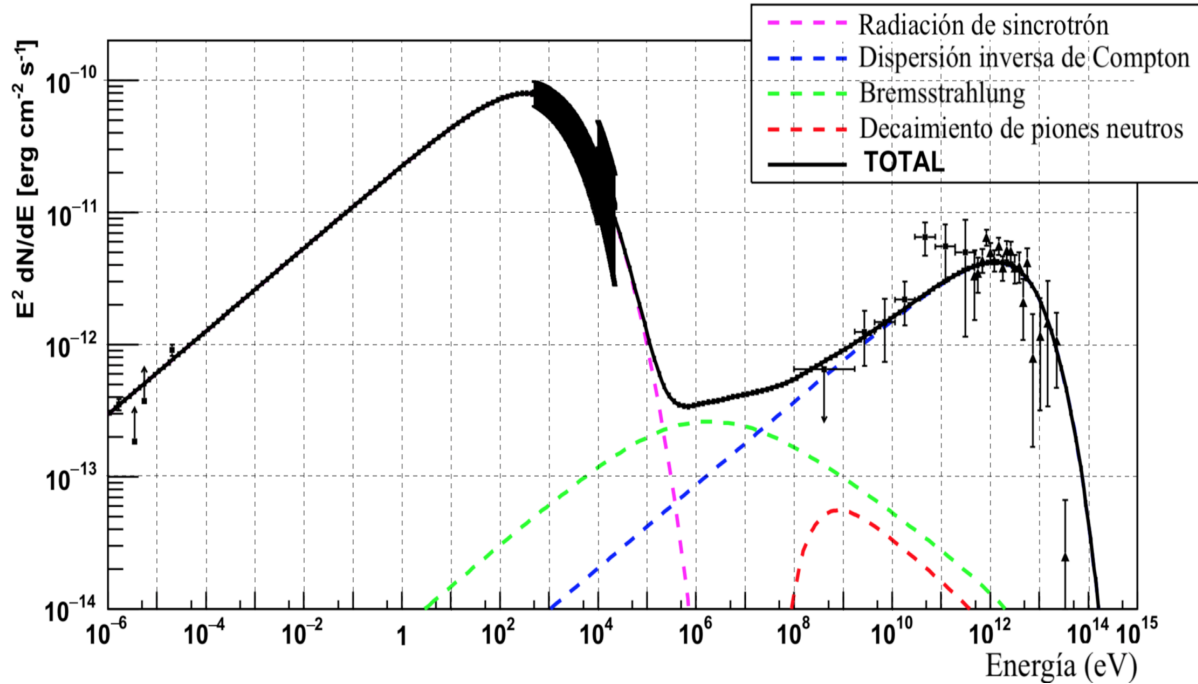


Figura 1: Distribuição espectral de energia de RCW 86 medida desde bandas de radio até raios gamma de altíssima energia (adaptada de M. Ajello et al., 2016, ApJ, 819, 98.), e o modelo “lep-tônico”.

### Considere:

O valor teórico de  $p$  descrito no caso mais simples (sem levar em conta efeitos não lineares) é  $p = 2$ . A forma de  $F$  se reflete na distribuição espectral dos fótons produzidos, pois é possível demonstrar que, tanto o espectro síncroton como a radiação via Compton Inverso (fluxo de fótons por unidade de área, tempo e energia) dependem da energia dos fótons segundo a expressão

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-(p+1)/2},$$

em pelo menos uma banda de energia abaixo da energia máxima (antes do máximo da distribuição espectral de energia).

- A partir do espectro mostrado na figura, estime o valor de  $p$  e compare-o com o valor teórico. **5 Pts**
- De acordo com as equações de Maxwell do eletromagnetismo, a energia máxima de um fóton síncroton típico emitido por um elétron com energia  $\epsilon$  em um campo magnético  $B$  é dado por

$$E_m \sim (1,93 \text{ keV}) \left( \frac{\epsilon}{100 \text{ TeV}} \right)^2 \left( \frac{B}{10 \mu\text{G}} \right).$$

O valor médio do campo magnético na zona onde estão os elétrons relativísticos é  $B \sim 10 \mu\text{G}$ . Usando este valor para o campo magnético, estime o valor da energia dos elétrons em TeV que produzem um fluxo de energia máximo síncroton em RCW 86. **5 Pts**

- c) Como foi explicado, no modelo leptônico os raios gama são produzidos por interações dos elétrons relativísticos com radiação de corpo negro de Planck a uma temperatura  $T = 2,73 \text{ K}$  (radiação cósmica de fundo, RCF). Usando relatividade restrita é possível demonstrar que a relação entre a energia típica de um fóton espalhado ( $E_f$ ) e sua energia inicial antes de interagir com um elétron ( $E_i$ ), ambas medidas no referencial do observador, é

$$E_f \approx \gamma^2 E_i ,$$

onde  $\gamma$  é o fator de Lorentz do elétron espalhado. Considerando que a energia típica de um fóton de RCF é  $k_B T$ , e usando o resultado do item anterior, calcule a energia (em TeV) onde ocorre o máximo da distribuição espectral dos raios gama, e compare o resultado com as observações. **10 Pts**

**Dados e informações necessárias:**

- Constante de Boltzmann:  $k_B = 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
- Massa do elétron em repouso:  $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$ .
- Energia relativística dos elétrons:  $E = \gamma mc^2$ .

### Problema 4: 25 Pts

O estudo da evolução de sistemas estelares binários ganhou muita importância na última década devido à descoberta das ondas gravitacionais. No entanto, esses sistemas são estudados há muito tempo. Neste exercício, exploraremos o que pode acontecer a um sistema binário compacto quando a estrela mais massiva sofre uma explosão de supernova, sob um modelo simplificado conhecido como *modelo de perda instantânea de massa*.

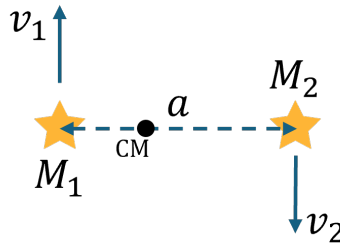


Figura 2: Sistema binário antes da explosão.

Começaremos com um sistema de duas estrelas de massas  $M_1$  e  $M_2$ , orbitando seu centro de massa (CM).  $\mathcal{O}$  denota o referencial que está em repouso em relação ao CM antes da explosão. Diremos que em relação a  $\mathcal{O}$ ,  $M_1$  tem uma velocidade imediatamente antes da explosão de  $v_1$ , enquanto  $M_2$  tem uma velocidade imediatamente antes da explosão de  $v_2$ . Além disso, definiremos o valor:

$$v_{orb}^2 = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a}$$

como a velocidade orbital relativa do sistema, onde  $a$  é a maior separação do sistema. Para simplificar os cálculos, assumiremos que as massas imediatamente antes da explosão têm uma separação de  $a$ .

Logo após a explosão da supernova, como a perda de massa da estrela é aproximada como instantânea, suponha que no lugar da estrela de massa  $M_1$ , permaneça um objeto compacto de massa  $M_{1f}$ , e ambos  $M_{1f}$  e  $M_2$  mantêm as velocidades e a separação que tinham antes da explosão. O referencial que está em repouso em relação ao novo centro de massa  $CM'$  entre  $M_{1f}$  e  $M_2$  também é denotado como  $\mathcal{O}'$ .

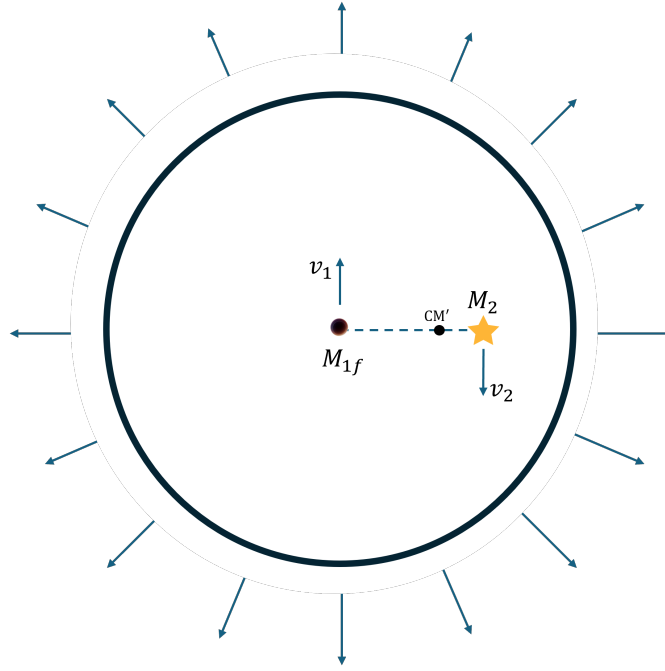


Figura 3: Sistema binário depois da explosão.

- a) Mostre que, visto desde  $\mathcal{O}$ , as velocidades  $v_1$  e  $v_2$  cumprem que: **7 Pts**

$$v_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} v_{orb} ,$$

$$v_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_{orb} .$$

- b) Mostre que a velocidade de  $CM'$  após a explosão, desde  $\mathcal{O}$ , cumpre que: **5 Pts**

$$\vec{v}_{CM'} = -\frac{\Delta M}{M_{1f} + M_2} \vec{v}_1 ,$$

onde  $\Delta M$  é a massa perdida por  $M_1$  durante a explosão.

- c) Encontre a energia mecânica do sistema binário depois da explosão em  $\mathcal{O}'$  e mostre que se pode simplificar da forma: **9 Pts**

$$E_f = -\frac{GM_{1f}M_2}{2a}(2 - \tilde{m}) ,$$

onde

$$\tilde{m} = \frac{M_1 + M_2}{M_{1f} + M_2}.$$

- d) A partir dos resultados anteriores, encontre qual a maior percentagem de massa que o sistema binário pode perder e, ao mesmo tempo, permanecer ligado gravitacionalmente. **4**

**Pts**