



Hoja de Instrucciones

Examen Teórico Grupal

IMPORTANTE

**NO ABRA LA CARPETA DE EXAMEN HASTA QUE SE LE INDIQUE.
DESOBEDECER ESTA INSTRUCCIÓN SERÁ MOTIVO DE DESCALIFICACIÓN INMEDIATA.**

1. Duración: **2 horas**. Trabaje **solo con su grupo** y siga las instrucciones de los supervisores. Cualquier violación puede resultar en advertencias, medidas adicionales o descalificación.
2. En su zona de trabajo encontrará esta **Hoja de Instrucciones, 5 Tarjetas de Colores (Blanca, para Papel; Naranja, para Preguntas; Azul, para Agua; Verde, para Baño; Roja, para Ayuda) y Un Sobre de Examen que contiene: El examen Teórico Grupal, 12 Hojas de Soluciones, 2 Formularios de Preguntas y Respuestas.**
3. Durante el examen se anunciará cuando haya terminado el tiempo de preguntas y cuando falten 30 minutos y 5 minutos.
4. Escriban sus respuestas en las **Hojas de Soluciones**. Si necesita más papel, solicítelo levantando la tarjeta blanca. **Cada hoja debe incluir: su código de grupo, el número del problema e indicar que es del Examen Teórico Grupal, y el número de página. Responda únicamente un problema por hoja; no combine dos o más problemas en la misma hoja. No escriba en el reverso de las hojas.**
5. **Solo durante los primeros 60 minutos del examen puede enviar preguntas escritas al Comité Científico.** Las preguntas deben escribirse en los **Formularios de Preguntas y Respuestas**. Una vez que su pregunta esté lista, levante la tarjeta naranja para que un supervisor la recoja y la entregue al Comité Científico. El Comité Científico decidirá si la pregunta será respondida. La respuesta será comunicada al participante. Dependiendo del número de preguntas, el proceso puede tomar algo de tiempo.
6. Si necesita agua, ir al baño (esto no está permitido durante los primeros o últimos 30 minutos del concurso), o requiere ayuda, utilice la tarjeta azul, verde y roja, respectivamente.
7. Una vez que se anuncie el final del examen, dejen de trabajar inmediatamente. Organicen su trabajo por problema y coloque las soluciones en el **Sobre de Examen**. **Todas las hojas que no estén dentro del Sobre de Examen serán descartadas y no revisadas.** Permanezca sentado y en silencio hasta que los supervisores recojan todos los **Sobres de Examen**.
8. Si terminan su trabajo durante los primeros 90 minutos (antes de los últimos 30 minutos) y desean salir, muestren su tarjeta roja para informar a los supervisores que desean terminar. **Después de abandonar el recinto de examen, no podrán regresar.** No se permite abandonar el recinto durante los primeros ni últimos 30 minutos del examen.
9. Solo pueden llevarse los materiales que trajeron en sus bolsas plásticas. **No está permitido llevarse ninguna parte del examen, hojas de soluciones, formularios de preguntas y respuestas, hojas de instrucciones ni tarjetas de colores.**

¡Muchos éxitos!

Prueba Teórica Grupal

Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica

Costa Rica 2024



Puntaje total: 70 puntos

Nota:

A lo largo del examen, se utiliza espacio para la separación de los miles, y coma para los decimales. Se puede utilizar a lo largo de un problema resultados de incisos anteriores.

Problema 1: 10 Pts

El perfil de intensidad radial de una galaxia, de acuerdo a Sérsic, se escribe:

$$\log_{10} \left[\frac{I(r)}{I_e} \right] = -b_n \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right],$$

donde I_e es la intensidad efectiva en un radio r_e , que encierra el 50 % de la luz y b_n es un parámetro relacionado con la forma, $b_n = 1,999n - 0,3271$, $1 < n < 10$. Para el caso del disco de galaxias espirales se describe bien cuando $n = 1$, mientras que en el caso del bulbo se describe bien cuando $n = 4$.

Suponga que el área estudiada y el área asociada a la efectiva son iguales.

- Encuentre la expresión de la diferencia entre la magnitud absoluta y la magnitud efectiva M_e en función de r y r_e para el disco. **5 Pts**
- Encuentre la expresión de la diferencia entre la magnitud absoluta y la magnitud efectiva M_e en función de r y r_e para el bulbo. **5 Pts**

Problema 2: 15 Pts

Un grupo de jóvenes latinoamericanos quiere observar la estrella Vega en una noche clara desde una ciudad situada a una latitud de $\phi = +40^\circ$. Sabiendo que Vega tiene una ascensión recta de 18 horas y una declinación de $\delta = +38^\circ$, determine

- ¿Cuál será el ángulo horario de Vega a las 22:00 horas de tiempo universal (TU) si el tiempo sideral local (TSL) en ese momento es de 16 horas? **5 Pts**
- ¿A qué hora cruza Vega el meridiano local en TU? **5 Pts**
- La altura de la estrella Vega en el momento de la observación. **5 Pts** Considere las siguientes expresiones:

Problema 3: 20 Pts

Contexto inicial:

A partir del análisis de la figura 1, que presenta el espectro del remanente de una explosión estelar, generado por la presencia de electrones que viajan casi a la velocidad de la luz. Al interactuar con campos magnéticos y luz antigua del universo, estos electrones producen radiación que abarca desde ondas de radio hasta rayos gamma. Los científicos interpretan este espectro como un mensaje oculto, descifrando la trayectoria de los electrones y la cantidad de energía que poseen. Este proceso nos conecta con la dramática historia del nacimiento y la muerte de las estrellas.

La figura 1 presenta un modelo para explicar el espectro no térmico del remanente de supernova RCW 86, propuesto por M. Ajello et al., 2016, ApJ, 819, 98. Se muestra la distribución espectral de energía, que es igual al producto del cuadrado de la energía de los fotones multiplicado por el espectro diferencial $\frac{dN}{dE}$, en función de la energía de los fotones detectados. Este modelo es conocido como modelo “leptónico” porque supone que la radiación es producida por electrones relativistas que adquieren gran energía en la onda de choque del remanente. Gran parte de la radiación detectada de este objeto, en dicho modelo, se debe a la radiación de sincrotrón (desde el radio hasta los rayos X) de los electrones en un campo magnético. Como se observa, esto corresponde a la “joroba” de la izquierda en la figura. Los mismos electrones que producen la radiación de sincrotrón también producen la “joroba” a la derecha de la distribución espectral mostrada (los rayos gamma de muy alta energía), debido a la dispersión inversa de Compton de fotones de la radiación cósmica de fondo de microondas, que ganan energía al chocar con dichos electrones. De esta forma, por ejemplo, los electrones que producen los fotones en el punto máximo del espectro $E^2 \frac{dN}{dE}$ de sincrotrón, producen también los fotones cerca del valor máximo de $E^2 \frac{dN}{dE}$ a altas energías.

Según la teoría de interacción con la onda de choque, la distribución espectral de los electrones relativistas (el número de electrones por unidad de energía, ϵ) está dada por una función potencial de la forma

$$F \propto \epsilon^{-p},$$

hasta una energía máxima de las partículas, a partir de la cual F empieza a decaer rápidamente (esta energía máxima podría estar definida por el hecho de que los electrones no han tenido suficiente tiempo para alcanzar energías mayores, o porque la misma radiación que producen

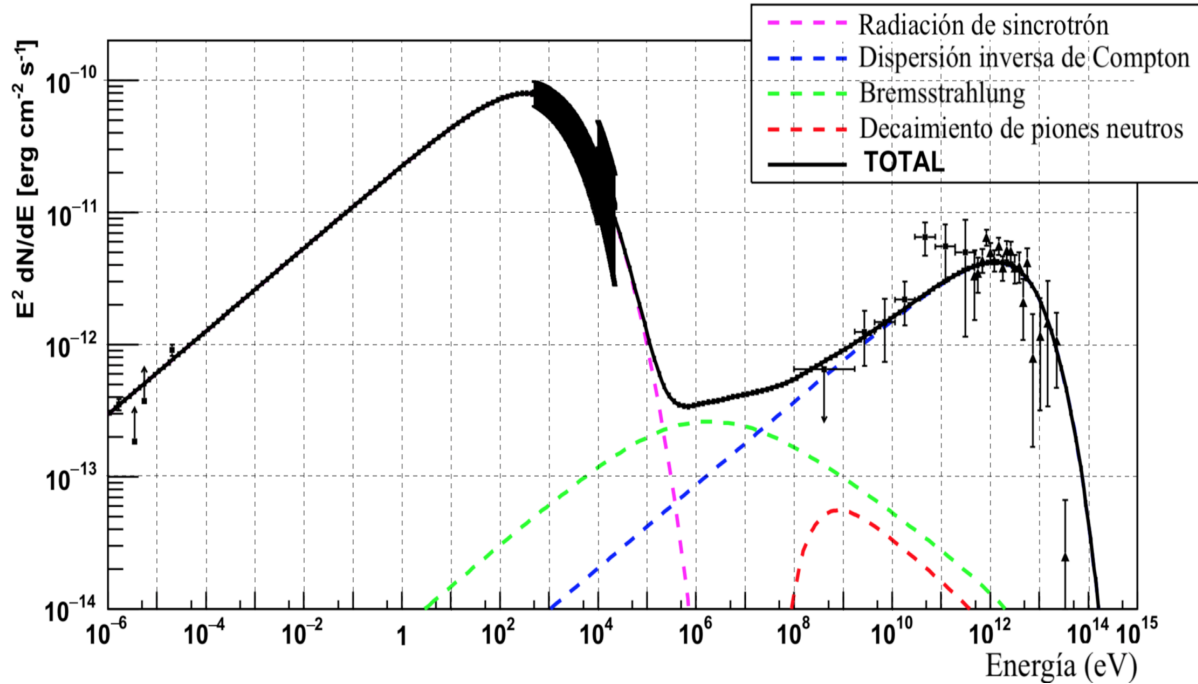


Figura 1: Distribución espectral de energía de RCW 86 medida desde el radio hasta los rayos gamma de muy alta energía (adaptada de M. Ajello et al., 2016, ApJ, 819, 98.), y el modelo “leptónico”.

se da a una tasa mayor que aquella con la que ganan energía, o bien porque han empezado a escapar de la fuente).

Considere:

El valor *teórico* de p predicho en el caso más simple (sin tomar en cuenta efectos no lineales), es $p = 2$. La forma de F se ve reflejada en la distribución espectral de los fotones producidos, pues se puede demostrar que, tanto el espectro de sincrotrón como el de la radiación inversa de Compton (flujo de fotones por unidad de área, tiempo y energía), adquieren una dependencia en la energía de los fotones de la forma

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-(p+1)/2},$$

al menos en un rango de energías por debajo de la energía máxima (antes del máximo de la distribución espectral de energía).

- A partir del espectro mostrado en la figura, estime el valor de p y compararlo con el valor teórico. **5 Pts**
- Según las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, la energía máxima de un fotón de sincrotrón típico emitido por un electrón con energía ϵ en un campo magnético B está dada por

$$E_m \sim (1,93 \text{ keV}) \left(\frac{\epsilon}{100 \text{ TeV}} \right)^2 \left(\frac{B}{10 \mu\text{G}} \right).$$

El valor promedio del campo magnético en la zona donde están los electrones relativistas es $B \sim 10 \mu\text{G}$. Usando este valor para el campo magnético, estime el valor de la energía de los electrones que producen el flujo de energía máximo de sincrotrón en RCW 86 en TeV. **5 Pts**

- c) Según se explicó, en el modelo leptónico los rayos gamma son producidos por interacciones de los electrones relativistas con radiación de cuerpo negro de Planck a una temperatura $T = 2,73 \text{ K}$ (radiación cósmica de fondo, RCF). Usando relatividad especial se puede demostrar que la relación entre la energía típica de un fotón dispersado (E_f) y su energía inicial antes de interactuar con un electrón (E_i), ambas medidas en el marco de referencia del observador, es

$$E_f \approx \gamma^2 E_i ,$$

donde γ es el factor de Lorentz del electrón que dispersa. Suponiendo que la energía típica de un fotón de la RCF es $k_B T$, y usando el resultado del inciso anterior, calcule la energía (en TeV) a la que se da el máximo de la distribución espectral de los rayos gamma, y comparar el resultado con las observaciones. **10 Pts**

Datos e información necesaria:

- Constante de Boltzmann: $k_B = 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
- Masa en reposo del electrón: $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$.
- Energía relativista de los electrones: $E = \gamma mc^2$.

Problema 4: 25 Pts

El estudio de la evolución de los sistemas binarios estelares ha ganado mucha importancia en la última década por el descubrimiento de las ondas gravitacionales. Sin embargo, estos sistemas se han venido estudiando desde mucho antes. En este ejercicio, exploraremos qué puede pasar con un sistema binario estrecho cuando la estrella más masiva experimenta una explosión de supernova, bajo un modelo simplificado conocido como el *modelo de pérdida de masa instantánea*.

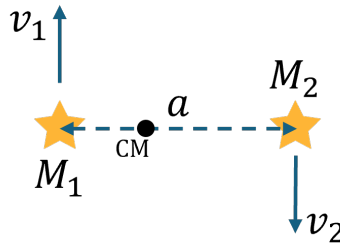


Figura 2: Sistema binario antes de la explosión.

Iniciaremos con un sistema de dos estrellas de masas M_1 y M_2 , orbitando su centro de masa (CM). Se denota al marco de referencia que se encuentra en reposo respecto al CM antes de la explosión $\mathcal{O}$. Diremos que respecto a $\mathcal{O}$, M_1 tiene una rapidez justo antes de la explosión de v_1 , mientras que M_2 tiene una rapidez justo antes de la explosión de v_2 . Además, vamos a definir la cantidad

$$v_{orb}^2 = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a}$$

como la rapidez orbital relativa del sistema, donde a es la mayor separación del sistema. Para simplificar los cálculos, supondremos que las masas justo antes de la explosión tienen una separación de a .

Justo después de la explosión de supernova, como la pérdida de masa de la estrella se aproxima como instantánea, supongamos que en lugar de la estrella de masa M_1 , queda un objeto compacto de masa M_{1f} , y tanto M_{1f} como M_2 mantienen las rapidezces y separación que tenían antes de la explosión. Se denota también como $\mathcal{O}'$ al marco de referencia que se encuentra en reposo respecto al nuevo centro de masa CM' entre M_{1f} y M_2 .

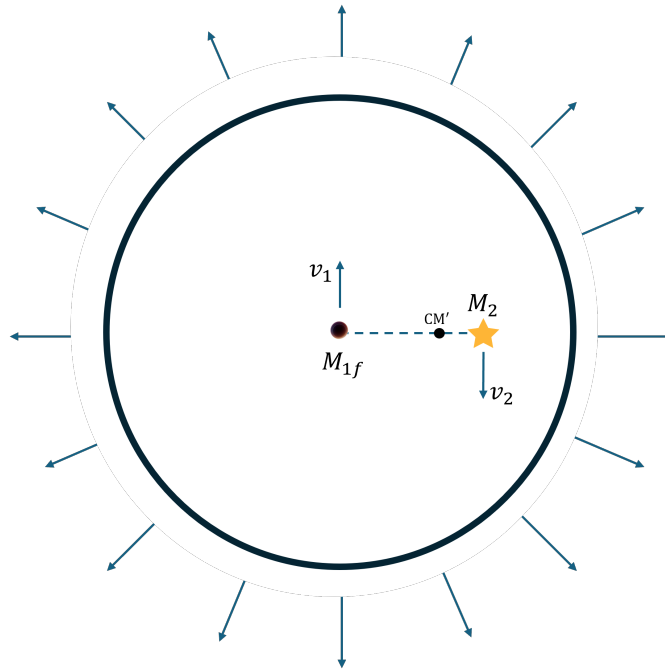


Figura 3: Sistema binario después de la explosión.

- a) Muestre que, visto desde $\mathcal{O}$, las rapidezces v_1 y v_2 cumplen que **7 Pts**

$$v_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} v_{orb} ,$$

$$v_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_{orb} .$$

- b) Muestre que la velocidad de CM' después de la explosión, desde $\mathcal{O}$, cumple que **5 Pts**

$$\vec{v}_{CM'} = -\frac{\Delta M}{M_{1f} + M_2} \vec{v}_1 ,$$

donde ΔM es la masa perdida por M_1 durante la explosión.

- c) Encuentre la energía mecánica del sistema binario después de la explosión en $\mathcal{O}'$, y muestre que se puede simplificar de la forma **9 Pts**

$$E_f = -\frac{GM_{1f}M_2}{2a}(2 - \tilde{m}) ,$$

donde

$$\tilde{m} = \frac{M_1 + M_2}{M_{1f} + M_2} .$$

- d) A partir de los resultados anteriores, encuentre cuál es el mayor porcentaje de masa que puede perder el sistema binario y a la vez mantenerse ligado gravitacionalmente. **4 Pts**