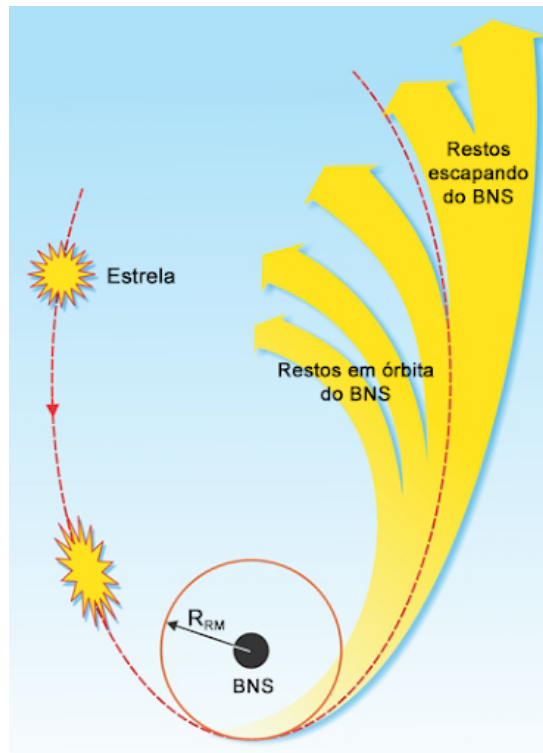


Q1. Destruição por Maré (10 pontos)

No final da década de 1970, astrofísicos teorizaram que a passagem de uma estrela próxima a um Buraco Negro Supermassivo (BNS) resultaria em sua destruição pelas forças de maré, criando um fluxo de detritos que espiralariam em direção ao buraco negro. O consequente aquecimento deste material produziria um clarão luminoso de radiação, servindo como uma assinatura reveladora da presença do BNS, cuja detecção direta seria impossível. A distância na qual uma estrela que se aproxima começa a ser dilacerada pela maré de um BNS de massa M_{BN} é chamada de raio de ruptura de maré R_{RM} , e que pode ser calculado, aproximadamente, através da seguinte fórmula:

$$R_{RM} \approx R_* \left(\frac{M_{BN}}{M_*} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Onde R_* e M_* são, respectivamente, o raio e a massa da estrela. Um esquema, fora de escala, é mostrado na imagem a seguir.



Fonte: M. J.Rees, Nature 333, 523 - 1988 (adaptado)

- (4 pontos)** Suponha que uma estrela semelhante ao Sol esteja se aproximando do Super Buraco Negro do centro da nossa galáxia, conhecido por Sagittarius A*. Qual planeta no Sistema Solar possui o raio orbital mais próximo da distância em que essa distância começaria a ser despedaçada? Considere que a massa de Sagittarius A* equivale a $4,02 \times 10^6 M_{\odot}$.
- (6 pontos)** Para BNSs suficientemente massivos, a estrela simplesmente desaparece dentro do buraco negro antes mesmo de ser destruída pelas forças de maré. Qual é o valor mínimo para a massa de um BNS para que uma estrela do tipo Sol seja “engolida” (isto é, adentre o horizonte de eventos do BNS) por ele antes de ser despedaçada pelas forças de maré?

Solução:

- (a) Substituindo-se os valores na equação dada e lembrando que $M_* = M_\odot$:

$$\begin{aligned}
 R_{RM} &\approx 6,957 \times 10^8 \text{ m} \times \left(\frac{4,02 \times 10^6 M_\odot}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= 6,957 \times 10^8 \text{ m} \times \sqrt[3]{4,02 \times 10^6} \\
 &= 1,11 \times 10^{11} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Em UA:

$$\begin{aligned}
 R_{RM} &\approx \frac{1,11 \times 10^{11} \text{ m}}{1,496 \times 10^{11} \text{ m/UA}} \\
 &= \boxed{0,74 \text{ UA}}
 \end{aligned}$$

Essa é uma distância próxima do raio orbital de Vênus.

- (b) O valor mínimo procurado para a massa do BNS será aquele para qual $R_S = R_{RM}$. Com M_{BH} expresso em termos de $M_\odot$ ($M_{BH} = nM_\odot$), temos:

$$\frac{2GnM_\odot}{c^2} = R_\odot \left(\frac{nM_\odot}{M_\odot} \right)^{1/3} \Rightarrow \frac{2GnM_\odot}{c^2} = R_\odot n^{1/3}$$

$$\frac{n^{1/3}}{n} = \frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \Rightarrow n^{-2/3} = \frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \Rightarrow n^{-2} = \left(\frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \right)^3 \Rightarrow n^2 = \frac{1}{\left(\frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \right)^3}$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \right)^3}}$$

$$\frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} = \frac{2(6.67 \times 10^{-11})(2.00 \times 10^{30})}{(3.00 \times 10^8)^2(6.96 \times 10^8)} \approx 4.26 \times 10^{-6}$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{(4.26 \times 10^{-6})^3}} \Rightarrow \boxed{n \approx 1.14 \times 10^8}$$

Portanto, a massa mínima nesse caso seria $1.14 \times 10^8 M_\odot$.

Grade de Correção (10 pontos)

- (a) + **2p** obter o valor de R_{RM} .
+ **2p** identificar que o valor de R_{RM} é comparável com o raio orbital de Vênus.
- (b) + **2p** relacionar corretamente a expressão para o raio de Schwarzschild com a expressão providenciada no enunciado.
+ **3p** obter uma expressão para n .
+ **1p** valor numérico correto de n .

Q2. Sistema Binário (10 pontos)

Um sistema binário é composto por uma estrela de nêutrons de massa $M_1 = 1,4 M_\odot$ e raio $R_{NS} = 10$ km, orbitando em torno de uma estrela companheira de massa $M_2 = 1,0 M_\odot$. A órbita é aproximadamente circular, com período orbital $T = 0,5$ dias. O sistema está localizado a uma distância $d = 500$ pc da Terra. Suponha que a estrela de nêutrons emite radiação como um corpo negro.

- (a) **(2 pontos)** Determine o semieixo maior a da órbita do sistema binário, em metros.
- (b) **(3 pontos)** Determine a velocidade orbital da estrela de nêutrons em torno do centro de massa do sistema.
- (c) **(3 pontos)** Suponha que a radiação térmica detectada na Terra proveniente da estrela de nêutrons tem fluxo $F = 5,0 \times 10^{-13} \text{ W m}^{-2}$.
 - (i) Calcule a luminosidade total L da estrela de nêutrons.
 - (ii) Determine sua temperatura efetiva T_{eff} assumindo que ela se comporta como um corpo negro.
- (d) **(2 pontos)** Usando a temperatura obtida no item anterior, calcule o comprimento de onda $\lambda_{\text{máx}}$ correspondente ao pico da emissão da estrela de nêutrons. Em qual faixa do espectro eletromagnético (raios gama, raios X, ultravioleta, visível etc.) esse pico se localiza?

Solução:

(a) Usando a terceira lei de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)} \Rightarrow a^3 = \frac{G(M_1 + M_2)T^2}{4\pi^2}$$

Convertendo o período para segundos:

$$T = 0,5 \text{ dias} = 0,5 \times 86400 \text{ s} = 43200 \text{ s}$$

Substituindo os valores:

$$M_1 + M_2 = (1,4 + 1,0)M_\odot = 2,4 \times 2,0 \times 10^{30} \text{ kg} = 4,8 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$a^3 = \frac{(6,67 \times 10^{-11})(4,8 \times 10^{30})(43200)^2}{4\pi^2} \approx 1,21 \times 10^{28} \text{ m}^3 \Rightarrow \boxed{a \approx 2,3 \times 10^9 \text{ m}}$$

(b) A distância da estrela de nêutrons ao centro de massa é:

$$a_1 = a \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} = 2,3 \times 10^9 \text{ m} \times \frac{1,0}{2,4} \approx \boxed{9,58 \times 10^8 \text{ m}}$$

A velocidade orbital da estrela de nêutrons é:

$$v_{\text{NS}} = \frac{2\pi a_1}{T} = \frac{2\pi \times 9,58 \times 10^8}{43200} \approx \boxed{1,39 \times 10^5 \text{ m/s}}$$

(c) (i) A luminosidade total emitida é:

$$L = 4\pi d^2 F = 4\pi (500 \times 3,09 \times 10^{16})^2 \times (5,0 \times 10^{-13}) \approx \boxed{1,5 \times 10^{27} \text{ W}}$$

(ii) Pela Lei de Stefan–Boltzmann:

$$L = 4\pi R_{\text{NS}}^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \Rightarrow T_{\text{eff}} = \left(\frac{L}{4\pi R_{\text{NS}}^2 \sigma} \right)^{1/4}$$

Substituindo os valores:

$$T_{\text{eff}} = \left(\frac{1,5 \times 10^{27}}{4\pi (1,0 \times 10^4)^2 (5,67 \times 10^{-8})} \right)^{1/4} \approx \boxed{2,1 \times 10^6 \text{ K}}$$

(d) Pela Lei de Wien:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2,90 \times 10^{-3}}{T_{\text{eff}}} = \frac{2,90 \times 10^{-3}}{2,1 \times 10^6} \approx 1,38 \times 10^{-9} \text{ m} = \boxed{1,38 \text{ nm}}$$

Esse comprimento de onda está na faixa dos **raios X moles**, característico de objetos muito quentes como estrelas de nêutrons.

Grade de Correção (10 pontos)

- (a) + **1p** usar corretamente a 3ª Lei de Kepler.
+ **1p** valor numérico correto $a \approx 2,3 \times 10^9 \text{ m}$.
- (b) + **1p** encontrar a distância da estrela de nêutrons ao centro de massa.
+ **1p** usar corretamente a equação da velocidade orbital da estrela de nêutrons v_{NS} .
+ **1p** valor numérico correto $v_{\text{NS}} \approx 1,39 \times 10^5 \text{ m/s}$.
- (c) + **1p** usar corretamente $L = 4\pi d^2 F$.
+ **0,5p** valor numérico correto $L \approx 1,5 \times 10^{27} \text{ W}$.
+ **1p** usar corretamente a Lei de Stefan–Boltzmann.
+ **0,5p** valor numérico correto $T_{\text{eff}} \approx 2,1 \times 10^6 \text{ K}$.
- (d) + **1p** usar corretamente a Lei de Wien.
+ **1p** encontrar a faixa do espectro: **raios X**.

Q3. NGC 6744 (10 pontos)

O NGC 6744, localizado na constelação *Pavo* (Pavão), é a galáxia espiral mais próxima e mais brilhante do hemisfério Sul a possuir características morfológicas semelhantes às da Via Láctea. A figura abaixo mostra o espectro (fluxo vs. comprimento de onda em Å) desse objeto.

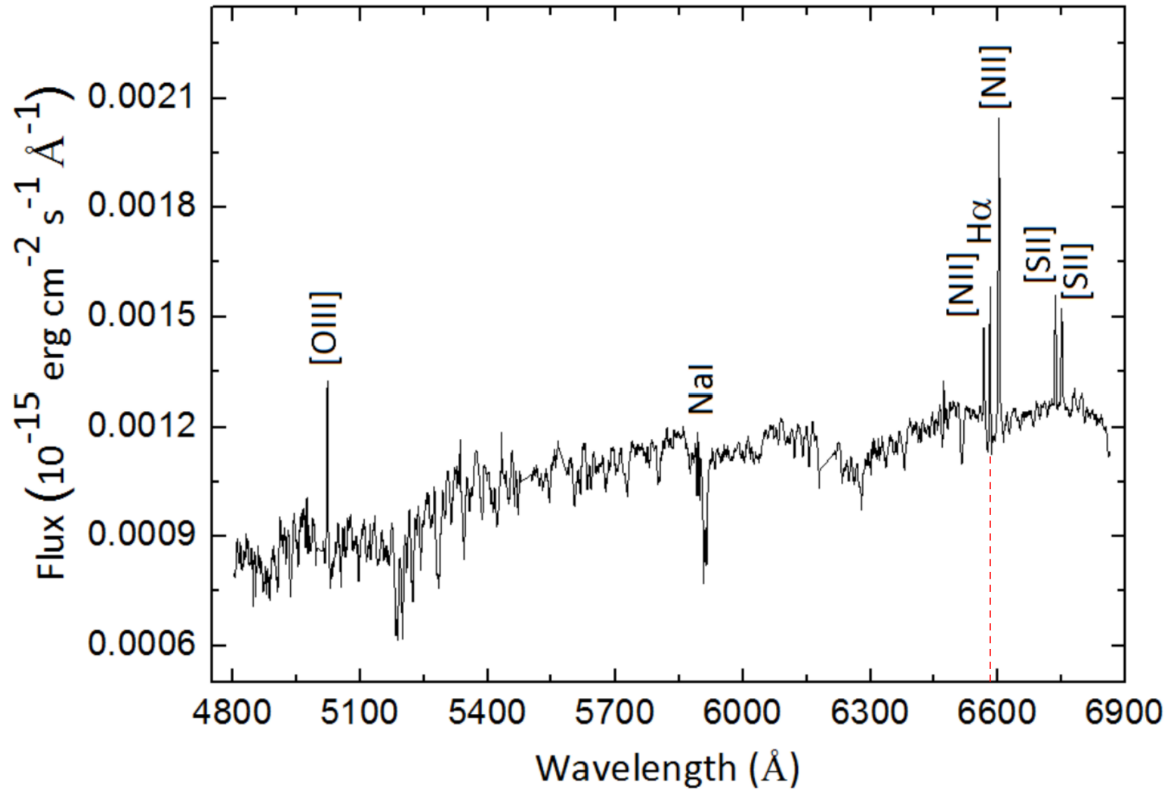


Figura 1: Espectro de NGC 6744. A linha tracejada serve para auxiliar na visualização da emissão em $H\alpha$.

- (3 pontos) A partir do gráfico, estime o redshift (z) da galáxia.
- (3 pontos) Obtenha a distância até a galáxia, em megaparsecs (Mpc).
- (4 pontos) Devido à expansão do universo, o redshift da galáxia muda lentamente com o passar do tempo, um efeito conhecido como *redshift drift*. Calcule a taxa de mudança temporal do redshift ($\frac{\Delta z}{\Delta t}$) da galáxia atualmente, em ano^{-1} .

Solução:

- Analisando o gráfico, podemos inferir o comprimento de onda observado da linha de Balmer $H\alpha$ é de $\lambda_{\text{obs}} \approx 6580 \text{ Å}$. Sendo assim, pela definição de redshift:

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{H\alpha}}{\lambda_{H\alpha}} = \frac{6580 - 6563}{6563} \approx \boxed{0,0026}$$

- Para baixos redshifts, pela Lei de Hubble, podemos afirmar que a velocidade de recessão da galáxia se relaciona com a sua distância por meio de

$$v_{\text{rec}} = cz = H_0 d$$

Em que $H_0 = 67,8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ é a constante de Hubble. Logo:

$$d = \frac{cz}{H_0} = \frac{2,998 \times 10^8 \times 0,0026}{67,8 \times 10^3} \approx \boxed{12 \text{ Mpc}}$$

(c) Novamente, a Lei de Hubble nos diz que

$$z = \frac{H_0 d}{c}$$

Para encontrar a taxa de variação do redshift, queremos:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{H_0}{c} \overbrace{\frac{\Delta d}{\Delta t}}^{v_{\text{rec}}} = H_0 z$$

Aqui, notamos que a taxa de variação da distância d equivale justamente à velocidade de recessão $v_{\text{rec}} = cz$. Portanto, em ano^{-1} :

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = H_0 z = \frac{67,8}{3,086 \times 10^{19}} \times 3,16 \times 10^7 \times 0,0026$$

$$\approx \boxed{1,8 \times 10^{-13} \text{ ano}^{-1}}$$

Perceba que utilizamos a conversão de megaparsecs para quilômetros $1 \text{ Mpc} \approx 3,086 \times 10^{19} \text{ km}$ e $1 \text{ ano} \approx 3,16 \times 10^7 \text{ s}$.

Grade de Correção (10 pontos)

- (a) + **1p** estimar corretamente o comprimento de onda observado da linha $\text{H}\alpha$ a partir do gráfico $\lambda_{\text{obs}} = 6580 \pm 8\text{\AA}$ **Obs:** O intervalo foi calculado com base no erro de medição de uma régua milimetrada.
 + **1p** utilizar corretamente a definição de redshift em termos de λ_{obs} e $\lambda_{\text{H}\alpha}$.
 + **1p** valor numérico correto $z = 0,0026 \pm 0,0012$
- (b) + **1p** aplicar a Lei de Hubble $v_{\text{rec}} = H_0 d$
 + **1p** utilizar o efeito Doppler para escrever $cz = H_0 d$ e isolar d
 + **1p** conversão correta de km ou m para Mpc
 + **1p** valor numérico correto para a distância $d = 11,5 \pm 5,4 \text{ Mpc}$
- (c) + **1,5p** tomar a variação em relação ao tempo da expressão de z em termos de d para obter $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{H_0}{c} \frac{\Delta d}{\Delta t}$
 + **1,5p** perceber que $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ corresponde à velocidade de recessão $v_{\text{rec}} = cz$ e substituir para achar $\frac{\Delta z}{\Delta t} = H_0 z$
 + **1p** valor numérico correto para a taxa de variação do redshift $\frac{\Delta z}{\Delta t} = (1,8 \pm 0,9) \times 10^{-3}$

Q4. O Sol no Rio (15 pontos)

Um observador no Rio de Janeiro ($22^{\circ}54'10''$ S, $42^{\circ}12'28''$ O) notou que às 11:00:00 (horário civil), o ângulo horário do Sol era igual a $-0h58min51s$. O fuso horário do Rio é GMT-3.

- (a) **(6 pontos)** Qual era a equação do tempo no momento dessa observação?
- (b) **(9 pontos)** Nesse mesmo dia, o Sol cruzou o meridiano local com uma distância zenital de $z = 39^{\circ}3'19''$. Ignorando a excentricidade da órbita da Terra, estime o dia do ano em que essa observação ocorreu.

Solução:

- (a) O centro do fuso GMT-3 corresponde a uma longitude de 45° O. Às 11:00:00, o ângulo horário do Sol médio no centro do fuso era igual a $11h - 12h = -1h$.

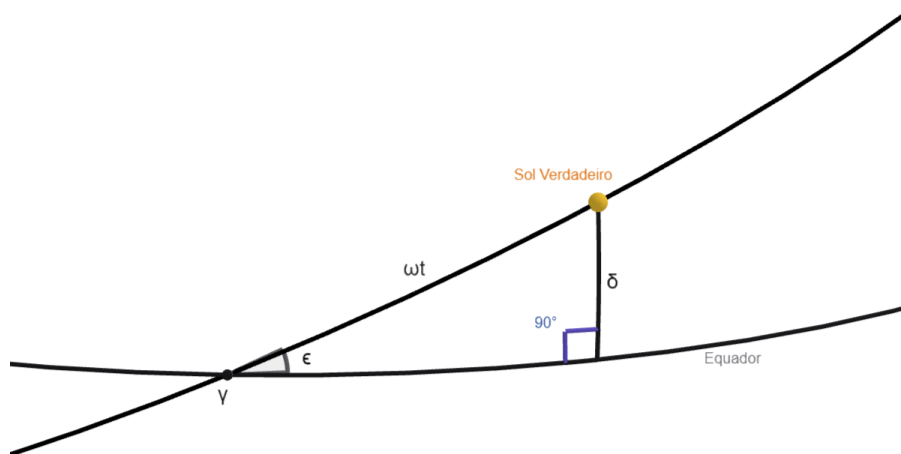
O Rio de Janeiro está $45^{\circ}0'0'' - 42^{\circ}12'28'' = 2^{\circ}47'32''$ a leste do centro do fuso. Portanto, o ângulo horário do Sol verdadeiro no Rio de Janeiro no momento da observação era igual a $-1h + 2^{\circ}47'32'' \approx -1h + 11min = -49min$

Como a equação do tempo (E) corresponde à diferença entre o ângulo horário do Sol verdadeiro e o ângulo horário do Sol médio:

$$\begin{aligned} E &= H_{\odot V} - H_{\odot M} \\ &= -49min - (-58min51s) \\ &= \boxed{9min51s} \end{aligned}$$

- (b) No momento em que o Sol passa pelo meridiano local, sua distância zenital é dada por: $z = |\phi| + \delta$, logo, a declinação do Sol no dia é $\delta = z - |\phi| = 39^{\circ}3'19'' - 22^{\circ}54'10'' = 16^{\circ}9'9''$.

Existem dois pontos possíveis em que o Sol tem essa declinação, um mais próximo do ponto vernal e o outro mais próximo do ponto anti-vernal. Como a equação do tempo tem sinal positivo, $H_{\odot V} > H_{\odot M}$ e como $H = TSL - \alpha$, temos $\alpha_{\odot V} < \alpha_{\odot M}$. Assim, o ponto correto é o mais próximo do ponto vernal.



Pela lei dos senos para triângulos esféricos:

$$\frac{\sin \delta}{\sin \epsilon} = \frac{\sin \omega t}{\sin 90^\circ}$$

Onde $\omega = \frac{360^\circ}{365,2422}$ é a velocidade angular do Sol.

Encontramos $t = 45$ dias, assim, a data da observação é **4 de maio**.

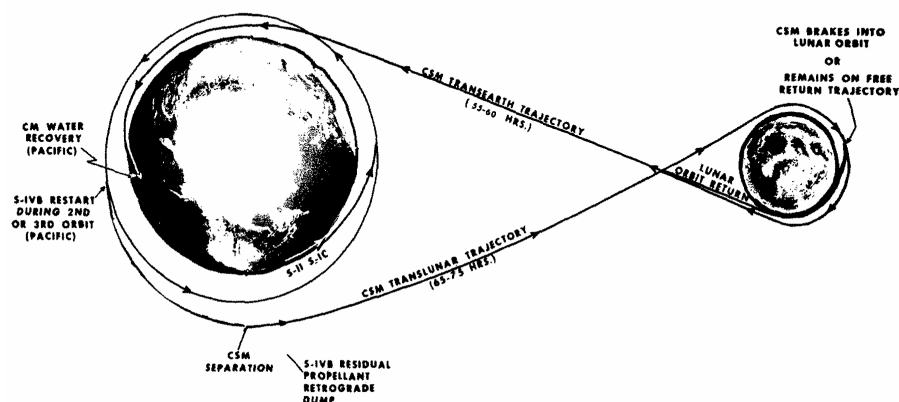
Grade de Correção (15 pontos)

- (a) + **1p** determinar o o ângulo horário do Sol médio no centro do fuso às 11:00:00.
- + **2p** determinar o ângulo horário do Sol verdadeiro no Rio de Janeiro às 11:00:00.
- + **2p** utilizar a expressão correta para a equação do tempo.
- + **1p** determinar o valor da equação do tempo no momento da observação.
- (b) + **1p** determinar a declinação do Sol.
- + **2p** corretamente identificar que o Sol está mais perto do ponto vernal do que do ponto anti-vernal.
- + **3p** desenhar ou descrever a geometria da situação corretamente.
- + **1p** utilizar a lei dos senos corretamente.
- + **1p** determinar a velocidade angular do Sol.
- + **1p** corretamente determinar o dia da observação.

Q5. Trajetória “Free Return” em Missões Lunares (15 pontos)

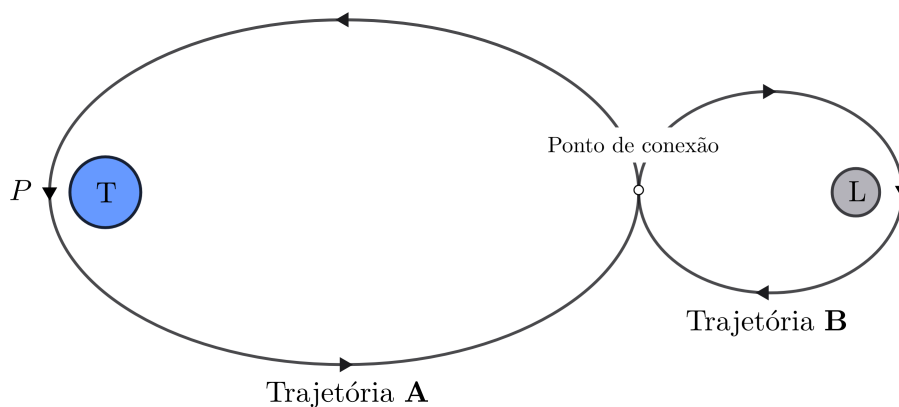
Em missões lunares, uma trajetória do tipo *free return* proporciona um retorno à Terra sem quaisquer manobras adicionais após a propulsão inicial. Nesse tipo de trajetória, a espaçonave precisa apenas de uma propulsão inicial para colocá-la em curso até a Lua, e a partir daí move-se apenas sob a ação da gravidade mútua dos astros. Permanecendo em curso, ela contorna a Lua e eventualmente retorna à Terra. Esse tipo de trajetória foi utilizado em missões como a Apollo 8, 10 e 11 da NASA. Durante esse movimento de ida à Lua e volta à Terra, a espaçonave traça uma figura semelhante a um número 8, conforme ilustra o plano orbital da missão Apollo 8 abaixo.

APOLLO 8 ORBIT PROFILE



Plano orbital da Apollo 8. Fonte: NASA, Apollo 8 Press Kit, 1968, Release No. 68-208

Neste problema, adotamos um modelo simplificado em que a figura-8 é representada por duas elipses **A** e **B** conectadas em um ponto sobre a linha Terra–Lua, conforme ilustra o esquema abaixo.



As setas indicam o sentido de movimento da espaçonave. $T \rightarrow$ Terra e $L \rightarrow$ Lua.

Considere uma missão lunar hipotética em que a espaçonave encontra-se inicialmente em órbita circular geocêntrica, no plano da figura. No ponto P , ela é impulsionada para o perigeu da trajetória elíptica **A**, com foco na Terra. Durante o movimento em **A**, considere apenas a atração gravitacional da Terra. Em um certo momento, a espaçonave alcança o ponto de influência gravitacional dominante da Lua, definido como o ponto de conexão entre as duas elipses. Nesse instante, considere que a influência gravitacional sobre a espaçonave passa **instantaneamente** da Terra para a Lua. A espaçonave então, **sem mudança no seu vetor velocidade**, passa a se mover na trajetória elíptica **B**, com foco na Lua. Durante o movimento em **B**, considere apenas a atração gravitacional da Lua. Note que, nesse modelo, a energia mecânica da espaçonave não é conservada na transição de **A** para **B**.

Resolva o problema no referencial geocêntrico e despreze o movimento da Lua em relação à Terra durante o

movimento da espaçonave na trajetória **B**.

- (a) **(3 pontos)** Considere que o foguete utilizado para levar a espaçonave até sua órbita circular inicial parte do repouso e possui um único estágio de queima de propelente. Ao final da queima, a velocidade do foguete é exatamente a velocidade orbital da espaçonave em sua órbita circular inicial. A Equação de Tsiolkovsky fornece a variação de velocidade Δv do foguete em função das massas iniciais e finais m_i e m_f do sistema e da velocidade de exaustão v_e do propelente:

$$\Delta v = v_e \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right)$$

Dado que $m_i/m_f = 6,00$ e $v_e = 4,35$ km/s, calcule a altitude da órbita, em km.

- (b) **(3 pontos)** Sendo o ponto de conexão aquele em que a intensidade da força de atração gravitacional da Lua é 3,00 vezes maior do que a atração da Terra, determine sua posição informando as distâncias ao centro da Terra e ao centro da Lua, em km.
- (c) **(9 pontos)** Determine o tempo total de viagem até a Lua, ou seja, do perigeu da órbita **A** até o perilúnio da órbita **B**, em dias.

Solução:

- (a) Usando a Equação de Tsiolkovsky:

$$\Delta v = v_e \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) = 4,35 \ln(6,00) \approx 7,7942 \text{ km/s.}$$

Como o foguete parte do repouso, a variação de velocidade já corresponde à velocidade na órbita circular. Além disso, a velocidade na órbita circular é dada por

$$v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}}$$

Logo, a altitude h é:

$$h = \frac{GM_{\oplus}}{v_{\text{circ}}^2} - R_{\oplus} = \frac{6,674 \times 10^{-11} \times 5,972 \times 10^{24}}{(7,8023 \times 10^3)^2} - 6,371 \times 10^6 \approx 1,90 \times 10^5 \text{ m}$$

Portanto, $h \approx 190 \text{ km}$.

- (b) Seja $D = 3,844 \times 10^5$ km a distância Terra–Lua. Denote por x a distância do ponto de conexão ao *centro da Lua* (logo, sua distância ao *centro da Terra* é $D - x$).

Pelo módulo da lei da gravitação, no ponto pedido vale

$$F_{\text{L}} = 3 F_{\text{T}} \implies \frac{G M_{\text{L}}}{x^2} = 3 \frac{G M_{\oplus}}{(D - x)^2},$$

onde $M_{\oplus} = 5,972 \times 10^{24}$ kg é a massa da Terra e $M_{\text{L}} = 7,346 \times 10^{22}$ kg a massa da Lua. Cancelando G e isolando x :

$$\frac{(D - x)^2}{x^2} = 3 \frac{M_{\oplus}}{M_{\text{L}}} \implies \frac{D - x}{x} = \sqrt{3 \frac{M_{\oplus}}{M_{\text{L}}}} \implies x = \frac{D}{1 + \sqrt{3 M_{\oplus}/M_{\text{L}}}}.$$

Substituindo os valores numéricos:

$$\sqrt{3 \frac{M_{\oplus}}{M_{\zeta}}} = \sqrt{3 \frac{5,972 \times 10^{24}}{7,346 \times 10^{22}}} \approx 15,62, \quad \Rightarrow \quad x \approx \frac{3,844 \times 10^5}{1 + 15,62} \text{ km} \approx 2,313 \times 10^4 \text{ km}.$$

Portanto,

$$\boxed{\text{Distância ao centro da Lua: } x \approx 2,31 \times 10^4 \text{ km}}$$

$$\boxed{\text{Distância ao centro da Terra: } D - x \approx 3,61 \times 10^5 \text{ km}}$$

- (c) O tempo total de ida até a Lua será a soma do tempo gasto em meia órbita na trajetória elíptica **A** (perigeu $\rightarrow$ ponto de conexão) com meia órbita na trajetória elíptica **B** (apolúnio no ponto de conexão $\rightarrow$ perilúnio). Vamos encontrá-los separadamente.

(i) Tempo na trajetória elíptica A:

O semi-eixo maior da elipse **A** é dado por:

$$a_A = \frac{r_p^{(A)} + r_a^{(A)}}{2} = 1,8393 \times 10^8 \text{ m}$$

Com $r_p^{(A)} = R_{\oplus} + h = 6,561 \times 10^3 \text{ km}$ e $r_a^{(A)} = D - x = 3,613 \times 10^5 \text{ km}$. Portanto, pela 3ª Lei de Kepler, o período da órbita **A**, e portanto o tempo gasto durante meia órbita é:

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{a_A^3}{GM_{\oplus}}} \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{T_A}{2} = \pi \sqrt{\frac{a_A^3}{GM_{\oplus}}}.$$

Numericamente,

$$t_A = \pi \sqrt{\frac{(1,8393 \times 10^8)^3}{6,674 \times 10^{-11} \times 5,972 \times 10^{24}}} \approx 3,9253 \times 10^5 \text{ s} \approx 4,54 \text{ dias}.$$

(ii) Tempo na trajetória elíptica B:

A velocidade nesse ponto (tangencial) é a da elipse **A** no apogeu, igual à do apoastro lunar de **B**. Usando a equação Vis-viva, a velocidade da espaçonave no apogeu de **A** é:

$$v_a^{(A)} = \sqrt{GM_{\oplus} \left(\frac{2}{r_a^{(A)}} - \frac{1}{a_A} \right)} \approx 1,9837 \times 10^2 \text{ m/s}$$

E, no apoastro de **B**, temos, analogamente:

$$v_a^{(B)} = \sqrt{GM_{\zeta} \left(\frac{2}{r_a^{(B)}} - \frac{1}{a_B} \right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a_B} = \frac{2}{r_a^{(B)}} - \frac{(v_a^{(B)})^2}{GM_{\zeta}},$$

Note que o apoastro de **B** é $r_a^{(B)} = x = 2,313 \times 10^4 \text{ km}$, do item (a). Agora, usamos o fato de que, no modelo considerado, o **vetor velocidade no ponto de conexão não se altera na transição entre A e B**. Portanto, $v_a^{(A)} = v_a^{(B)}$ e então podemos substituir o valor encontrado de $v_a^{(A)}$ na equação acima para calcular a_B :

$$a_B = \frac{1}{\frac{2}{2,3130 \times 10^7} - \frac{(1,9837 \times 10^2)^2}{6,674 \times 10^{-11} \times 7,346 \times 10^{22}}} \approx 1,2748 \times 10^7 \text{ m}$$

Pela 3ª Lei de Kepler para a elipse **B**, o seu período e tempo gasto em meia órbita é de:

$$T_B = 2\pi\sqrt{\frac{a_B^3}{GM_\zeta}} \implies t_B = \frac{T_B}{2} = \pi\sqrt{\frac{a_B^3}{GM_\zeta}}.$$

Numericamente,

$$t_B = \pi\sqrt{\frac{(1,2748 \times 10^7)^3}{6,674 \times 10^{-11} \times 7,346 \times 10^{22}}} \approx 6,4579 \times 10^4 \text{ s} \approx 0,747 \text{ dias}.$$

(iii) **Tempo total até a Lua:**

Por fim, o tempo total de viagem até a Lua é dado por:

$$t_{\text{total}} = t_A + t_B \approx 4,54 \text{ dias} + 0,747 \text{ dias} \approx \boxed{5,29 \text{ dias}}.$$

Grade de Correção (15 pontos)

- (a) + **1p** usar a equação de Tsiolkovsky para achar a variação de velocidade do foguete
+ **0,5p** notar que $\Delta v = v_{\text{circ}}$.
+ **1p** velocidade na órbita circular a uma altitude h : $v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}}$.
+ **0,5p** valor numérico correto $h \approx 190 \text{ km}$
- (b) + **1p** equacionar corretamente a condição $F_\zeta = 3F_\oplus$ em função das massas dos astros e distâncias envolvidas.
+ **1p** desenvolver e isolar $x = \frac{D}{1 + \sqrt{3M_\oplus/M_\zeta}}$ (ou equivalente).
+ **1p** valor numérico correto para a distância ao centro da Lua $x \approx 2,31 \times 10^4 \text{ km}$.
+ **1p** valor numérico correto para a distância ao centro da Terra $D - x \approx 3,61 \times 10^5 \text{ km}$.
- (c) + **0,5p** obter o semi-eixo maior (a_A) da elipse **A**.
+ **1p** utilizar a Terceira Lei de Kepler para expressar o período T_A da órbita **A**.
+ **1p** usar a equação Vis-Viva para obter a velocidade no apogeu da órbita **A** $v_a^{(A)}$.
+ **1p** usar a equação Vis-Viva para obter a velocidade no apogeu da órbita **B** $v_a^{(B)}$.
+ **2p** fazer uso da continuidade da velocidade $v_a^{(A)} = v_a^{(B)}$ para isolar o semi-eixo maior a_B da órbita **B**.
+ **1p** utilizar a Terceira Lei de Kepler para expressar o período T_B da órbita **B**.
+ **2p** perceber que o tempo de viagem até a Lua é dado por meio período na elipse **A** e meio período na elipse **B**.
+ **0,5p** valor numérico correto para o tempo de viagem até o perilúnio: $t \approx 5,29 \text{ dias}$.

Q6. Observação Solar (20 pontos)

Um astrônomo amador na Terra, animado com a intensa atividade solar em 2025, instala um filtro H-alfa em seu telescópio para observar erupções e manchas solares. Seu telescópio conta também com um pequeno detector CCD. **Dados:** Diâmetro da abertura do telescópio $D = 20$ cm.

Esta questão é dividida em duas partes que podem ser independentemente resolvidas.

Parte 1 (13 pontos):

- (a) **(2 pontos)** A *Radiância Espectral* $B(\lambda, T)$, isto é, a potência emitida por unidade de área, por unidade de comprimento de onda, por unidade de ângulo sólido de um corpo negro é dada pela Lei de Planck:

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}].$$

Dado que a superfície do Sol se comporta aproximadamente como um corpo negro, calcule a **Radiância Espectral do Sol no comprimento de onda H-alfa**, em $\text{W m}^{-2} \text{m}^{-1} \text{sr}^{-1}$.

- (b) **(4 pontos)** O *Fluxo Espectral* é a potência de luz recebida por unidade de área e por unidade de comprimento de onda, levando em conta todo o espaço que a fonte ocupa no céu. Nesse contexto, calcule o **Fluxo Espectral do Sol em $\lambda_{H\alpha}$ que atinge a Terra**, em $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}$ (despreze a absorção atmosférica). **Dica:** calcule o ângulo sólido subtendido pelo Sol visto da Terra.
- (c) **(7 pontos)** A curva de transmissão do filtro H-alfa usado pelo astrônomo é apresentada na figura abaixo.

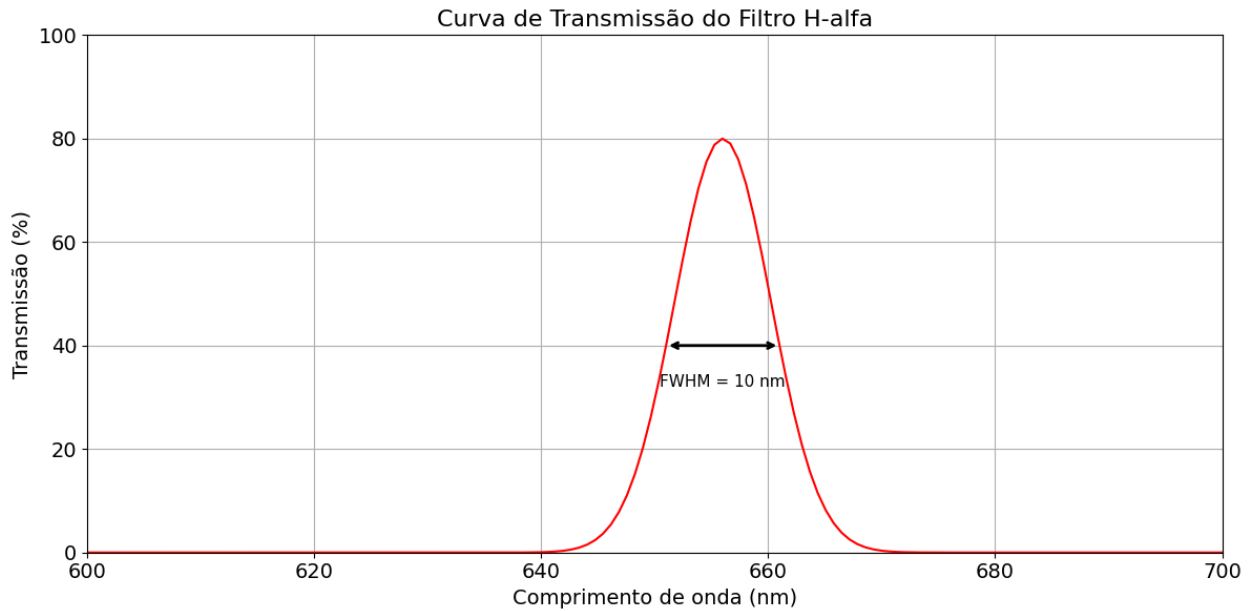


Figura 2: Curva de transmissão do filtro, centrado em 656,3 nm, utilizado pelo astrônomo.

O eixo Y do gráfico mostra a porcentagem de luz incidente que o filtro permite passar para cada comprimento de onda. O FWHM (*Full Width at Half Maximum*) representa simplesmente a faixa espectral $\Delta\lambda$ observada, que corresponde ao intervalo de comprimentos de onda transmitidos em torno da linha H-alfa.

Considerando que toda a luz coletada pelo telescópio atinge o CCD, calcule o **número de fótons N_f** do comprimento de onda $\lambda_{H\alpha}$ que atingem o CCD após uma exposição de $\Delta t = 1$ segundo.

Parte 2 (7 pontos):

O astrônomo consegue tirar uma foto de uma erupção solar usando seu telescópio refletor $f/5$.

Ansioso para classificar a erupção solar vista, o astrônomo precisa calcular a área angular do evento, analisando os dados da imagem obtida por seu CCD. O CCD tem 1024×1024 pixels, cada um com $15\mu\text{m} \times 15\mu\text{m}$ de área.

- (d) **(1,5 pontos)** Calcule a **resolução angular θ em H-alfa do telescópio** em segundos de arco (arcsec).
- (e) **(3 pontos)** Calcule a sua **escala de placa** em segundos de arco por micrômetro (arcsec/ μm).
- (f) **(2,5 pontos)** A erupção solar ocupa uma região quadrada de 20 pixels $\times$ 20 pixels no CCD. Qual a **área angular** dela em arcsec²?

Solução:

- (a) A Radiância Espectral do Sol é dada pela Lei de Planck:

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

Como $T = T_S = 5772 \text{ K}$ e $\lambda = 656,3 \text{ nm}$:

$$B(\lambda, T) \approx 2,24 \times 10^{13} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$$

- (b) Para calcular a fração dessa radiação que escapa a superfície solar e alcança a Terra, precisamos multiplicar $B(\lambda, T)$ pelo ângulo sólido subtendido pelo Sol na Terra:

$$F(\lambda) = B(\lambda, T) \cdot \pi \left(\frac{R_S}{d_{Terra-Sol}} \right)^2 \Rightarrow F(\lambda) \approx 1,53 \times 10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}$$

- (c) O número de fótons para o comprimento de onda do H-alfa pode ser calculado por:

$$N_f = \frac{\text{Energia total}}{\text{Energia do fóton}}$$

Da curva de transmissão, concluímos que a transmissão para 656,3 nm é de 80% e que a faixa espectral observada é de $\Delta\lambda = 10 \text{ nm}$ (FWHM). Logo:

$$N_f = \frac{80\% \cdot F(\lambda) \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \Delta\lambda \cdot \Delta t}{\frac{hc}{\lambda}} \Rightarrow N_f \approx 1,26 \times 10^{18}$$

- (d) A resolução angular θ do telescópio é dada pelo critério de Rayleigh:

$$\theta [\text{rad}] = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

Uma vez que $\lambda_{H\alpha} = 656,3 \text{ nm}$, $D = 20 \text{ cm}$ e $1 \text{ rad} = 206265 \text{ arcsec}$:

$$\theta = 1,22 \times \frac{656,3 \times 10^{-9}}{20 \times 10^{-2}} \approx 4,00 \times 10^{-6} \text{ rad} \approx \boxed{0,83 \text{ arcsec}}$$

(e) Como o telescópio é $f/5$ e o diâmetro é $D = 20$ cm, sua distância focal é f é dada por:

$$\frac{f}{D} = 5 \Rightarrow f = 100 \text{ cm}$$

Com isso, a escala de placa p do telescópio é dada por:

$$p = \frac{1}{f} = 0,01 \text{ rad/cm} = 1 \times 10^{-6} \text{ rad}/\mu\text{m}$$

Uma vez que $1 \text{ rad} = 206265 \text{ arcsec}$, temos:

$$p = 0,206265 \text{ arcsec}/\mu\text{m}$$

(f) Como a área de cada pixel é $15\mu\text{m} \times 15\mu\text{m}$, a área do céu coberta por cada pixel vale:

$$(15 \mu\text{m})^2 \times (206265 \times 10^{-6} \text{ arcsec}/\mu\text{m})^2 \approx 9,57 \text{ arcsec}^2/\text{pixel}$$

Uma vez que a área ocupada pela erupção é de 20×20 , i.e. 400 pixels, o tamanho angular da erupção é de:

$$400 \times 9,57 = 3828 \text{ arcsec}^2 (\approx 62 \text{ arcsec} \times 62 \text{ arcsec})$$

Grade de Correção (20 pontos)

- (a) + **0,5p** selecionar o valor correto para λ : 656,3 nm.
 + **0,5p** selecionar o valor correto para T : 5772 K.
 + **1p** usar a lei de Planck para encontrar corretamente $B(\lambda, T) \approx 2,29 \times 10^{13} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$ com unidades.
- (b) + **2p** calcular o ângulo sólido do Sol visto da Terra: $\Omega_S = \pi \left(\frac{R_{\oplus}}{d_{\text{Terra-Sol}}} \right)^2 \text{ sr}$.
 + **1,5p** indicar que o fluxo espectral será a radiância espectral calculada no item (a) multiplicada pelo ângulo sólido do Sol: $F(\lambda) = B(\lambda, T) \cdot \Omega_S$
 + **0,5p** encontrar $F(\lambda) \approx 1,55 \times 10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}$ com unidades.
- (c) + **1p** indicar que o número de fótons é dado por $N_f = \frac{\text{Energia total}}{\text{Energia do fóton}}$.
 + **4p** expressão correta da energia total incidente no CCD: $E_{\text{total}} = 80\% \cdot F(\lambda) \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \Delta\lambda \cdot \Delta t$.
 + **1,5p** expressão correta da energia do fóton: $E_f = \frac{hc}{\lambda}$.
 + **0,5p** encontrar $N_f \approx 1,29 \times 10^{18}$.
- (d) + **1p** expressão correta para a resolução angular: $\theta [\text{rad}] = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$.
 + **0,5p** encontrar $\theta \approx 0,83 \text{ arcsec}$ com unidades.
- (e) + **1p** encontrar a distância focal: $f = 5 \cdot D$.
 + **1,5p** expressão correta da escala de placa: $p = 1/f$
 + **0,5p** encontrar $p = 0,206265 \text{ arcsec}/\mu\text{m}$ com unidades.
- (f) + **2p** expressão correta para encontrar o tamanho angular da erupção, usando a escala de placa e o tamanho do pixel.
 + **0,5p** encontrar $3828 \text{ arcsec}^2 (\approx 62 \text{ arcsec} \times 62 \text{ arcsec})$ com unidades.

Q7. Estrela Hiperveloz com o Perkin-Elmer (20 pontos)

Estrelas hipervelozes são estrelas que se movem a velocidades tão altas que podem escapar da gravidade da galáxia de onde se originaram. Elas podem nos revelar muito sobre a dinâmica de galáxias e buracos negros supermassivos. Por exemplo, sugere-se que a estrela S5-HVS1, uma das mais velozes já registradas, fosse originalmente parte de um sistema binário, do qual foi violentamente ejetada pelas forças de maré do buraco negro supermassivo Sagittarius A* no centro da nossa galáxia. Considere os seguintes dados de S5-HSV1:

- Magnitude absoluta: $M = 1,4$.
- Magnitude aparente: $m = 16,1$.
- Movimento próprio: $\mu = 35,3 \text{ mas/ano}$ (milissegundos de arco por ano).
- Módulo da velocidade espacial total: $V = 1,7 \times 10^3 \text{ km/s}$.

Suponha um cenário no qual astrônomos resolvam monitorar essa estrela utilizando o maior telescópio em solo brasileiro: o Perkin-Elmer, localizado no Observatório do Pico dos Dias (OPD), em Brazópolis, Minas Gerais. O telescópio possui um diâmetro de 1,6 m.

- (a) **(4 pontos)** Calcule (i) a distância até a estrela atualmente (d_0), em kpc (quiloparsecs) e (ii) o módulo de sua velocidade radial atual (V_r), em km/s.
- (b) **(3 pontos)** Considerando que o olho humano possui uma magnitude limite de +6 mag e uma pupila de diâmetro 6 mm em boas condições de observação, calcule a magnitude limite do telescópio Perkin-Elmer levando em conta apenas o seu diâmetro.
- (c) **(7 pontos)** Sabendo que S5-HVS1 se movimenta em linha reta com velocidade constante de módulo V e se afastando de nós, mostre que a expressão literal para a distância da estrela até nós em função do tempo (sendo hoje $t = 0$) é dada por

$$d(t) = \sqrt{d_0^2 + V^2 t^2 + 2 d_0 V_r t}$$

- (d) **(6 pontos)** Por fim, estime por quantos milhões de anos os nossos astrônomos (e seus sucessores) poderiam observar a estrela até que ela torne-se fraca demais para ser observada com o Perkin-Elmer.

Solução:

- (a) (i) Pelo módulo de distância (com d_0 em pc):

$$m - M = 5 \log_{10} d_0 - 5 \Rightarrow d_0 = 10^{\frac{m-M+5}{5}} \text{ pc.}$$

Com $m - M = 16,1 - 1,4 = 14,7$,

$$d_0 = 10^{\frac{14,7+5}{5}} = 10^{3,94} \text{ pc} \approx 8,71 \times 10^3 \text{ pc} = \boxed{8,7 \text{ kpc}}.$$

(ii) Para achar a velocidade radial, primeiro convertamos o movimento próprio total para radianos por segundo ($1 \text{ rad} = 206265'' \rightarrow 1'' = 4,848 \times 10^{-6} \text{ rad}$):

$$\mu = 35,3 \times 4,848 \times 10^{-9} \text{ rad/ano} \approx 5,42 \times 10^{-15} \text{ rad/s.}$$

A distância é $d_0 = 8,7 \text{ kpc} = 2,69 \times 10^{17} \text{ km}$, lembrando que $1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{13} \text{ km}$. Logo, a velocidade tangencial é:

$$V_t = \mu d_0 = (5,42 \times 10^{-15})(2,69 \times 10^{17}) \approx 1460 \text{ km/s.}$$

Como a velocidade espacial total é dada pela soma pitagórica entre a radial e a tangencial, a velocidade radial é dada por:

$$V_r = \sqrt{V^2 - V_t^2} = \sqrt{(1700)^2 - (1460)^2} \approx \boxed{940 \text{ km/s}}.$$

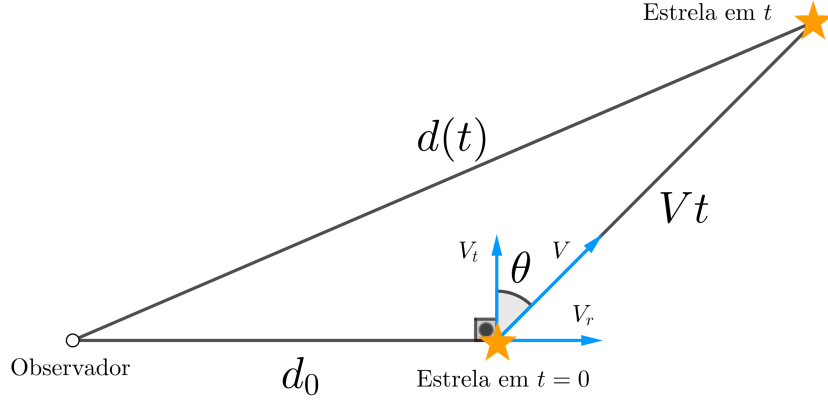
- (b) O ganho em magnitude por diâmetro é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta m &= -2,5 \log_{10} \left(\frac{D_{\text{olho}}^2}{D_{\text{tel}}^2} \right) = 5 \log_{10} \left(\frac{D_{\text{tel}}}{D_{\text{olho}}} \right) \\ &= 5 \log_{10} \left(\frac{1600}{6} \right) \approx 5 \times 2,42597 \approx 12,1298. \end{aligned}$$

Como o olho vai até +6 mag, o limite estimado pelo diâmetro do telescópio é

$$m_{\text{lim}} \approx 6,0 + \Delta m \approx \boxed{18,1 \text{ mag}}.$$

(c) Esquema da geometria da situação:



Considere o triângulo formado pelos três segmentos: o lado d_0 (posição inicial), o lado Vt (deslocamento da estrela) e o lado $d(t)$ (nova distância até nós). Pela Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo acima no lado $d(t)$ oposto ao ângulo $90^\circ + \theta$, temos

$$d(t)^2 = d_0^2 + (Vt)^2 - 2 d_0 (Vt) \overbrace{\cos(90^\circ + \theta)}^{-\sin \theta} = d_0^2 + V^2 t^2 + 2 d_0 V t \sin \theta.$$

A componente radial da velocidade é $V_r = V \sin \theta$; logo,

$$d(t)^2 = d_0^2 + V^2 t^2 + 2 d_0 V_r t, \quad \Rightarrow \quad d(t) = \sqrt{d_0^2 + V^2 t^2 + 2 d_0 V_r t}.$$

(d) A estrela está hoje em $m = 16,1$. Para sair do limite de observação, sua magnitude precisa de um acréscimo de $\Delta m = m_{\text{lim}} - m = 18,1 - 16,1 = 2,0$ mag.

Agora, vamos encontrar a distância que a estrela estará de nós quando sua magnitude aumentar de Δm ; chame-a de d . Sendo $F \propto 1/d^2$ o fluxo observado da estrela no limite de observação e $F_0 \propto 1/d_0^2$ seu fluxo hoje, temos, comparando as magnitudes:

$$\Delta m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F}{F_0} \right) = -5 \log_{10} \left(\frac{d}{d_0} \right)$$

Isolando d :

$$\frac{d}{d_0} = 10^{\Delta m/5} = 10^{0,40} \approx 2,51, \quad \Rightarrow \quad d \approx 2,51 d_0 \approx 2,51 \times 8,71 \approx 21,9 \text{ kpc}.$$

Agora, queremos achar o tempo t tal que a distância é d . Usando o resultado do item passado:

$$d = \sqrt{d_0^2 + 2 d_0 V_r t + V^2 t^2} \quad \Rightarrow \quad V^2 t^2 + 2 d_0 V_r t + d^2 - d_0^2 = 0$$

Dividindo por V^2 e inserindo os valores numéricos para as distâncias em km e as velocidades em km/s, encontramos uma equação com t em segundos:

$$t^2 + \frac{2 \times 2,69 \times 10^{17} \times 940}{(1,7 \times 10^3)^2} t + \frac{8,7^2 - 21,9^2}{(1,7 \times 10^3)^2} \times (3,086 \times 10^{16})^2 = 0$$

$$t^2 + 1,747 \times 10^{14} t - 1,327 \times 10^{29} = 0$$

Resolvendo a equação, as soluções são:

$$t = \frac{-1,747 \times 10^{14} \pm 7,493 \times 10^{14}}{2} \text{ s}$$

$$t_+ \approx 2,87 \times 10^{14} \text{ s} \quad t_- \approx -4,62 \times 10^{14} \text{ s}$$

Como contamos a partir de $t = 0$, buscamos a raiz positiva t_+ . Logo, em anos, $t = 2,87 \times 10^{14} \text{ s} \approx 9,1 \times 10^6 \text{ anos}$. Então, os astrônomos poderiam observar a estrela por um tempo de aproximadamente **9 milhões de anos**.

Grade de Correção (20 pontos)

- (a) + **1p** fazer uso do módulo de distância
 - + **0,5p** valor numérico correto para d_0 em kpc
 - + **1p** usar a definição de movimento próprio $V_t = \mu d_0$ para calcular V_t
 - + **1p** escrever $V_r = \sqrt{V^2 - V_t^2}$
 - + **0,5p** valor numérico correto para V_r
- (b) + **2p** expressão correta relacionando o ganho de magnitude (ou a magnitude limite diretamente) de com os diâmetros do olho e telescópio, **-1p** se não relacionou corretamente o fluxo captado com a área do detector (por exemplo, utilizou apenas a razão dos diâmetros ao comparar a magnitude limite).
 - + **1p** valor numérico correto para a magnitude limite
- (c) + **3p** desenho esquematizando a geometria da situação (ângulos e distâncias relevantes para a solução claramente apontados, **-1,5p** se incompleto).
 - + **2p** aplicar a lei dos cossenos (ou teorema de pitágoras) para achar $d(t)$
 - + **2p** relacionar o ângulo θ (ou equivalente) com a velocidade radial por meio de $V_r = V \sin \theta$ (ou equivalente) para eliminar sua dependência
- (d) + **1p** comparar as magnitudes para obter a distância final d (expressão literal é suficiente)
 - + **1,5p** utilizar a expressão do item passado para obter uma equação do segundo grau em t da forma $at^2 + bt + c = 0$ (equação literal é suficiente)
 - + **1,5p** substituir a distância final d e resolver para o tempo de observação t
 - + **1p** explicitar a escolha da raiz positiva como resposta correta
 - + **1p** valor numérico correto para t em milhões de anos (notação científica com 10^6 é aceitável. **-0,5p** se unidade incorreta)