

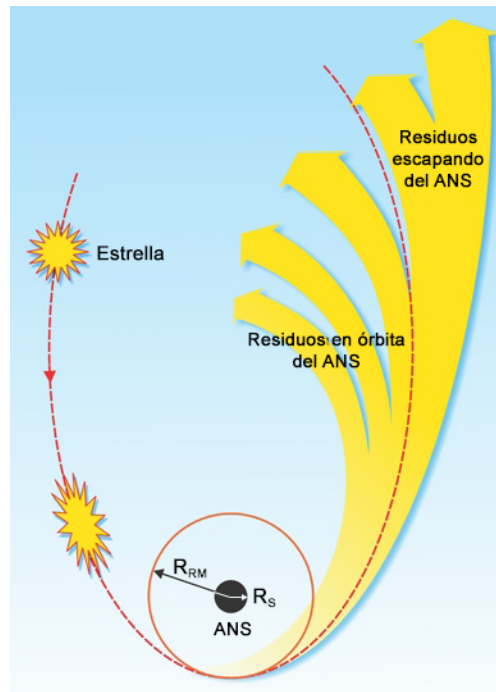
Q1. Destrucción por Marea (10 puntos)

A finales de la década de 1970, astrofísicos teorizaron que el paso de una estrella cerca de un Agujero Negro Supermasivo (ANS) resultaría en su destrucción por fuerzas de marea, creando un flujo de detritos que espiralaría hacia el agujero negro. El consecuente calentamiento de este material produciría un destello luminoso de radiación, sirviendo como una firma reveladora de la presencia del ANS, cuya detección directa sería imposible.

La distancia a la cual una estrella que se aproxima empieza a ser desgarrada por la marea de un ANS de masa M_{AN} se llama radio de ruptura de marea R_{RM} , y puede calcularse, aproximadamente, mediante la siguiente fórmula:

$$R_{RM} \approx R_* \left(\frac{M_{AN}}{M_*} \right)^{\frac{1}{3}}$$

donde R_* y M_* son, respectivamente, el radio y la masa de la estrella. Un esquema, fuera de escala, se muestra en la imagen siguiente.



Fuente: M. J. Rees, Nature 333, 523 - 1988 (adaptado)

- (4 puntos) Suponga que una estrella semejante al Sol se está aproximando al Agujero Negro Supermasivo del centro de nuestra galaxia, conocido como Sagittarius A*. ¿Qué planeta del Sistema Solar posee el radio orbital más cercano a la distancia en que esta estrella comenzaría a ser despedazada? Considere que la masa de Sagittarius A* equivale a $4,02 \times 10^6 M_{\odot}$.
- (6 puntos) Para ANSs suficientemente masivos, la estrella simplemente desaparece dentro del agujero negro antes incluso de ser destruida por las fuerzas de marea. ¿Cuál es el valor mínimo para la masa de un ANS para que una estrella tipo Sol sea “engullida” (esto es, cruce el horizonte de sucesos del ANS) antes de ser despedazada por las fuerzas de marea?

Solución:

- (a) Sustituyendo los valores en la ecuación dada y recordando que $M_* = M_\odot$:

$$\begin{aligned}
 R_{RM} &\approx 6,957 \times 10^8 \text{ m} \times \left(\frac{4,02 \times 10^6 M_\odot}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= 6,957 \times 10^8 \text{ m} \times \sqrt[3]{4,02 \times 10^6} \\
 &= 1,11 \times 10^{11} \text{ m}
 \end{aligned}$$

En UA:

$$\begin{aligned}
 R_{RM} &\approx \frac{1,11 \times 10^{11} \text{ m}}{1,496 \times 10^{11} \text{ m/UA}} \\
 &= \boxed{0,74 \text{ UA}}
 \end{aligned}$$

Esta es una distancia cercana al radio orbital de Venus.

- (b) El valor mínimo buscado para la masa del ANS será aquel para el cual $R_S = R_{RM}$. Con M_{BH} expresada en términos de $M_\odot$ ($M_{BH} = nM_\odot$), tenemos:

$$\frac{2GnM_\odot}{c^2} = R_\odot \left(\frac{nM_\odot}{M_\odot} \right)^{1/3} \Rightarrow \frac{2GnM_\odot}{c^2} = R_\odot n^{1/3}$$

$$\frac{n^{1/3}}{n} = \frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \Rightarrow n^{-2/3} = \frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \Rightarrow n^{-2} = \left(\frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \right)^3 \Rightarrow n^2 = \frac{1}{\left(\frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \right)^3}$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} \right)^3}}$$

$$\frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot} = \frac{2(6,67 \times 10^{-11})(2,00 \times 10^{30})}{(3,00 \times 10^8)^2 (6,96 \times 10^8)} \approx 4,26 \times 10^{-6}$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{(4,26 \times 10^{-6})^3}} \Rightarrow \boxed{n \approx 1,14 \times 10^8}$$

Por lo tanto, la masa mínima en este caso sería $1,14 \times 10^8 M_\odot$.

Rúbrica de Corrección (10 puntos)

- (a) + **2p** obtener el valor de R_{RM} .
+ **2p** identificar que el valor de R_{RM} es comparable con el radio orbital de Venus.
- (b) + **2p** relacionar correctamente la expresión para el radio de Schwarzschild con la expresión proporcionada en el enunciado.
+ **3p** obtener una expresión para n .
+ **1p** valor numérico correcto de n .

Q2. Sistema Binario (10 puntos)

Un sistema binario está compuesto por una estrella de neutrones de masa $M_1 = 1,4 M_\odot$ y radio $R_{NS} = 10$ km, orbitando en torno a una estrella compañera de masa $M_2 = 1,0 M_\odot$. La órbita es aproximadamente circular, con período orbital $T = 0,5$ días. El sistema está localizado a una distancia $d = 500$ pc de la Tierra. Suponga que la estrella de neutrones emite radiación como un cuerpo negro.

- (a) **(2 puntos)** Determine el semieje mayor a de la órbita del sistema binario, en metros.
- (b) **(3 puntos)** Determine la velocidad orbital de la estrella de neutrones en torno al centro de masa del sistema.
- (c) **(3 puntos)** Suponga que la radiación térmica detectada en la Tierra proveniente de la estrella de neutrones tiene flujo $F = 5,0 \times 10^{-13} \text{ W m}^{-2}$.
 - (i) Calcule la luminosidad total L de la estrella de neutrones.
 - (ii) Determine su temperatura efectiva T_{eff} asumiendo que se comporta como un cuerpo negro.
- (d) **(2 puntos)** Usando la temperatura obtenida en el ítem anterior, calcule la longitud de onda $\lambda_{\text{máx}}$ correspondiente al pico de emisión de la estrella de neutrones. ¿En qué región del espectro electromagnético (rayos gamma, rayos X, ultravioleta, visible, etc.) se localiza este pico?

Solución:

(a) Usando la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)} \Rightarrow a^3 = \frac{G(M_1 + M_2)T^2}{4\pi^2}$$

Convirtiendo el período a segundos:

$$T = 0,5 \text{ días} = 0,5 \times 86400 \text{ s} = 43200 \text{ s}$$

Sustituyendo los valores:

$$M_1 + M_2 = (1,4 + 1,0)M_\odot = 2,4 \times 2,0 \times 10^{30} \text{ kg} = 4,8 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$a^3 = \frac{(6,67 \times 10^{-11})(4,8 \times 10^{30})(43200)^2}{4\pi^2} \approx 1,21 \times 10^{28} \text{ m}^3 \Rightarrow \boxed{a \approx 2,3 \times 10^9 \text{ m}}$$

(b) La distancia de la estrella de neutrones al centro de masa es:

$$a_1 = a \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} = 2,3 \times 10^9 \text{ m} \times \frac{1,0}{2,4} \approx 9,58 \times 10^8 \text{ m}$$

La velocidad orbital de la estrella de neutrones es:

$$v_{\text{NS}} = \frac{2\pi a_1}{T} = \frac{2\pi \times 9,58 \times 10^8}{43200} \approx \boxed{1,39 \times 10^5 \text{ m/s}}$$

(c) (i) La luminosidad total emitida es:

$$L = 4\pi d^2 F = 4\pi (500 \times 3,09 \times 10^{16})^2 \times (5,0 \times 10^{-13}) \approx \boxed{1,5 \times 10^{27} \text{ W}}$$

(ii) Por la ley de Stefan–Boltzmann:

$$L = 4\pi R_{\text{NS}}^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \Rightarrow T_{\text{eff}} = \left(\frac{L}{4\pi R_{\text{NS}}^2 \sigma} \right)^{1/4}$$

Sustituyendo los valores:

$$T_{\text{eff}} = \left(\frac{1,5 \times 10^{27}}{4\pi (1,0 \times 10^4)^2 (5,67 \times 10^{-8})} \right)^{1/4} \approx \boxed{2,1 \times 10^6 \text{ K}}$$

(d) Por la ley de Wien:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2,90 \times 10^{-3}}{T_{\text{eff}}} = \frac{2,90 \times 10^{-3}}{2,1 \times 10^6} \approx 1,38 \times 10^{-9} \text{ m} = \boxed{1,38 \text{ nm}}$$

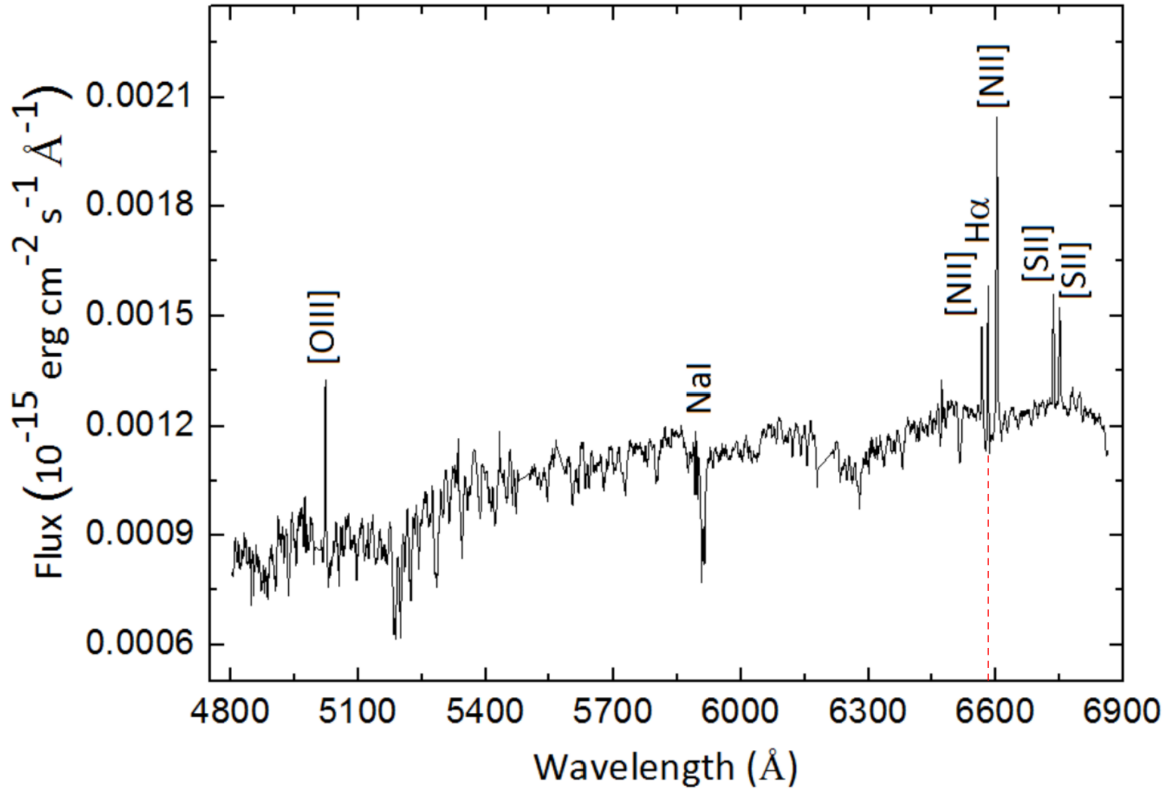
Esa longitud de onda está en la región de los **rayos X blandos**, característica de objetos muy calientes como las estrellas de neutrones.

Rúbrica de Corrección (10 puntos)

- (a) + **1p** usar correctamente la 3ª ley de Kepler.
+ **1p** valor numérico correcto $a \approx 2,3 \times 10^9 \text{ m}$.
- (b) + **1p** encontrar la distancia de la estrella de neutrones al centro de masa.
+ **1p** usar correctamente la ecuación de la velocidad orbital de la estrella de neutrones v_{NS} .
+ **1p** valor numérico correcto $v_{\text{NS}} \approx 1,39 \times 10^5 \text{ m/s}$.
- (c) + **1p** usar correctamente $L = 4\pi d^2 F$.
+ **0,5p** valor numérico correcto $L \approx 1,5 \times 10^{27} \text{ W}$.
+ **1p** usar correctamente la ley de Stefan–Boltzmann.
+ **0,5p** valor numérico correcto $T_{\text{eff}} \approx 2,1 \times 10^6 \text{ K}$.
- (d) + **1p** usar correctamente la ley de Wien.
+ **1p** identificar la región del espectro: **rayos X**.

Q3. NGC 6744 (10 puntos)

NGC 6744, localizada en la constelación *Pavo*, es la galaxia espiral más cercana y más brillante del hemisferio sur que posee características morfológicas similares a las de la Vía Láctea. La figura de abajo muestra el espectro (flujo vs. longitud de onda en Å) de este objeto.



Espectro de NGC 6744. La línea discontinua sirve para ayudar en la visualización de la emisión en $H\alpha$.

- (3 puntos) A partir del gráfico, estime el corrimiento al rojo (z) de la galaxia.
- (3 puntos) Obtenga la distancia hasta la galaxia, en megapársecs (Mpc).
- (4 puntos) Debido a la expansión del Universo, el corrimiento al rojo de la galaxia cambia lentamente con el paso del tiempo, un efecto conocido como *redshift drift*. Calcule la tasa de cambio temporal del corrimiento al rojo ($\frac{\Delta z}{\Delta t}$) de la galaxia actualmente, en año^{-1} .

Solución:

- Analizando el gráfico, podemos inferir que la longitud de onda observada de la línea de Balmer $H\alpha$ es $\lambda_{\text{obs}} \approx 6580 \text{ Å}$. Así, por la definición de corrimiento al rojo:

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{H\alpha}}{\lambda_{H\alpha}} = \frac{6580 - 6563}{6563} \approx \boxed{0,0026}$$

- (b) Para bajos corrimientos al rojo, por la Ley de Hubble, podemos afirmar que la velocidad de recesión de la galaxia se relaciona con su distancia mediante

$$v_{\text{rec}} = cz = H_0 d$$

donde $H_0 = 67,8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ es la constante de Hubble. Luego:

$$d = \frac{cz}{H_0} = \frac{2,998 \times 10^8 \times 0,0026}{67,8 \times 10^3} \approx \boxed{12 \text{ Mpc}}$$

- (c) Nuevamente, la Ley de Hubble nos dice que

$$z = \frac{H_0 d}{c}$$

Para encontrar la tasa de variación del corrimiento al rojo, queremos:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{H_0}{c} \overbrace{\frac{\Delta d}{\Delta t}}^{v_{\text{rec}}} = H_0 z$$

Aquí, notamos que la tasa de variación de la distancia d equivale justamente a la velocidad de recesión $v_{\text{rec}} = cz$. Por lo tanto, en año^{-1} :

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = H_0 z = \frac{67,8}{3,086 \times 10^{19}} \times 3,16 \times 10^7 \times 0,0026$$

$$\approx \boxed{1,8 \times 10^{-13} \text{ año}^{-1}}$$

Observe que utilizamos la conversión de megapársecs a kilómetros $1 \text{ Mpc} \approx 3,086 \times 10^{19} \text{ km}$ y $1 \text{ año} \approx 3,16 \times 10^7 \text{ s}$.

Rúbrica de Corrección (10 puntos)

- (a) + **1p** estimar correctamente la longitud de onda observada de la línea $\text{H}\alpha$ a partir del gráfico $\lambda_{\text{obs}} = 6580 \pm 8 \text{ \AA}$. **Obs.:** El intervalo fue calculado con base en el error de medición de una regla milimetrada.
- + **1p** utilizar correctamente la definición de corrimiento al rojo en términos de λ_{obs} y $\lambda_{\text{H}\alpha}$.
- + **1p** valor numérico correcto $z = 0,0026 \pm 0,0012$
- (b) + **1p** aplicar la Ley de Hubble $v_{\text{rec}} = H_0 d$
- + **1p** usar el efecto Doppler para escribir $cz = H_0 d$ y aislar d
- + **1p** conversión correcta de km o m a Mpc
- + **1p** valor numérico correcto para la distancia $d = 11,5 \pm 5,4 \text{ Mpc}$
- (c) + **1,5p** tomar la variación respecto del tiempo de la expresión de z en términos de d para obtener $\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{H_0}{c} \frac{\Delta d}{\Delta t}$
- + **1,5p** notar que $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ corresponde a la velocidad de recesión $v_{\text{rec}} = cz$ y sustituir para hallar $\frac{\Delta z}{\Delta t} = H_0 z$
- + **1p** valor numérico correcto para la tasa de variación del corrimiento al rojo $\frac{\Delta z}{\Delta t} = (1,8 \pm 0,9) \times 10^{-13} \text{ año}^{-1}$

Q4. El Sol en Río (15 puntos)

Un observador en Río de Janeiro ($22^{\circ}54'10''$ S, $42^{\circ}12'28''$ O) notó que a las 11:00:00 (hora civil), el ángulo horario del Sol era igual a $-0h58min51s$. El huso horario de Río es GMT-3.

- (a) **(6 puntos)** ¿Cuál era la ecuación del tiempo en el momento de esa observación?
- (b) **(9 puntos)** Ese mismo día, el Sol cruzó el meridiano local con una distancia cenital de $z = 39^{\circ}3'19''$. Ignorando la excentricidad de la órbita de la Tierra, estime el día del año en que ocurrió esa observación.

Solución:

- (a) El centro del huso GMT-3 corresponde a una longitud de 45° O. A las 11:00:00, el ángulo horario del Sol medio en el centro del huso era igual a $11h - 12h = -1h$.

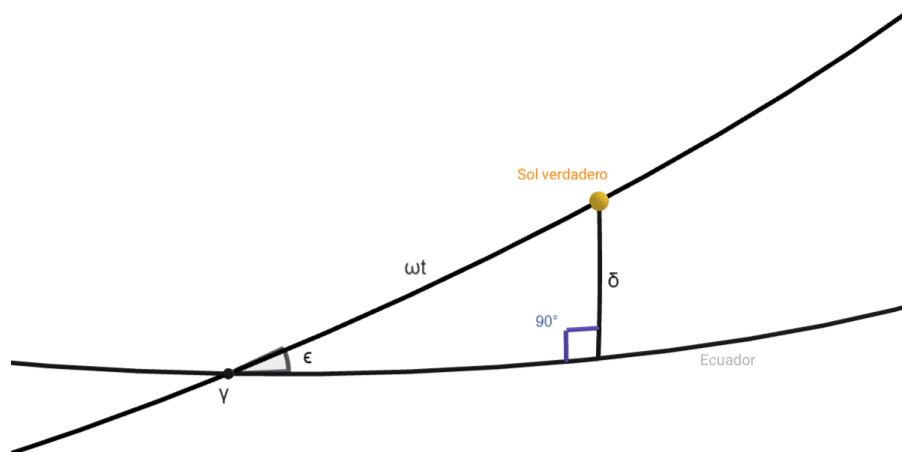
Río de Janeiro está $45^{\circ}0'0'' - 42^{\circ}12'28'' = 2^{\circ}47'32''$ al este del centro del huso. Por lo tanto, el ángulo horario del Sol verdadero en Río de Janeiro en el momento de la observación era igual a $-1h + 2^{\circ}47'32'' \approx -1h + 11min = -49min$

Como la ecuación del tiempo (E) corresponde a la diferencia entre el ángulo horario del Sol verdadero y el ángulo horario del Sol medio:

$$\begin{aligned}
 E &= H_{\odot V} - H_{\odot M} \\
 &= -49min - (-58min51s) \\
 &= \boxed{9min51s}
 \end{aligned}$$

- (b) En el momento en que el Sol pasa por el meridiano local, su distancia cenital está dada por: $z = |\phi| + \delta$, luego, la declinación del Sol ese día es $\delta = z - |\phi| = 39^{\circ}3'19'' - 22^{\circ}54'10'' = 16^{\circ}9'9''$.

Existen dos puntos posibles en los que el Sol tiene esa declinación, uno más próximo al punto vernal y otro más próximo al punto anti-vernal. Como la ecuación del tiempo tiene signo positivo, $H_{\odot V} > H_{\odot M}$ y como $H = TSL - \alpha$, tenemos $\alpha_{\odot V} < \alpha_{\odot M}$. Así, el punto correcto es el más cercano al punto vernal.



Por la ley de los senos para triángulos esféricos:

$$\frac{\sin \delta}{\sin \epsilon} = \frac{\sin \omega t}{\sin 90^\circ}$$

donde $\omega = \frac{360^\circ}{365,2422}$ es la velocidad angular del Sol.

Encontramos $t = 45$ días; así, la fecha de la observación es **4 de mayo**.

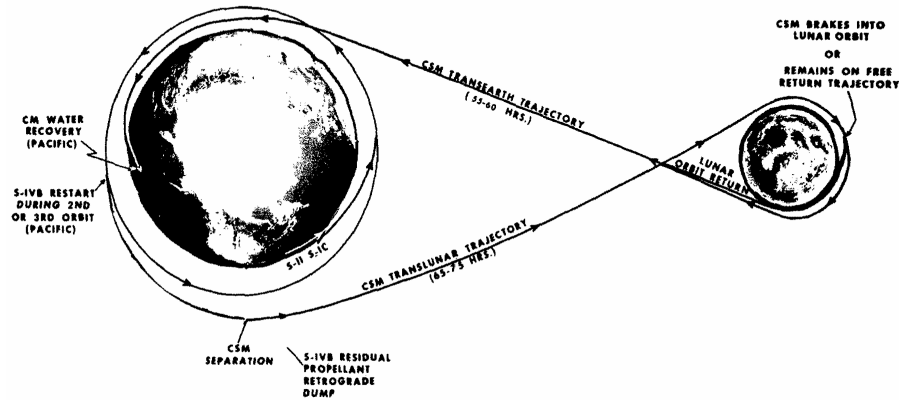
Rúbrica de Corrección (15 puntos)

- (a) + **1p** determinar el ángulo horario del Sol medio en el centro del huso a las 11:00:00.
- + **2p** determinar el ángulo horario del Sol verdadero en Río de Janeiro a las 11:00:00.
- + **2p** usar la expresión correcta para la ecuación del tiempo.
- + **1p** determinar el valor de la ecuación del tiempo en el momento de la observación.
- (b) + **1p** determinar la declinación del Sol.
- + **2p** identificar correctamente que el Sol está más cerca del punto vernal que del punto anti-vernal.
- + **3p** dibujar o describir correctamente la geometría de la situación.
- + **1p** usar correctamente la ley de los senos.
- + **1p** determinar la velocidad angular del Sol.
- + **1p** determinar correctamente el día de la observación.

Q5. Trayectoria “Free Return” en Misiones Lunares (15 puntos)

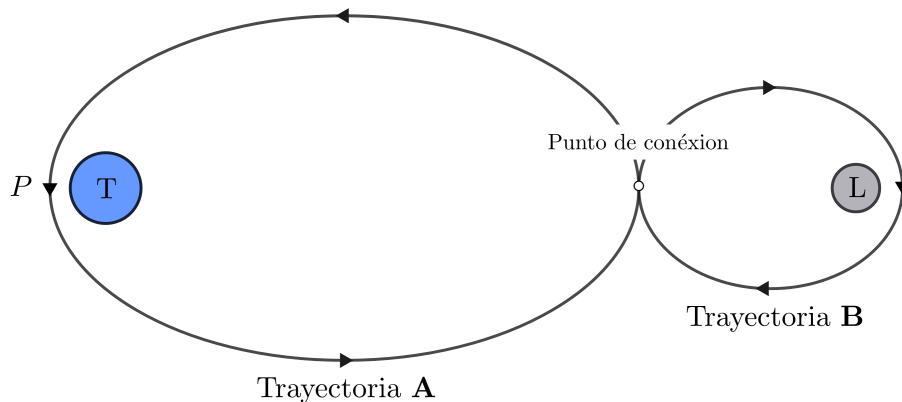
En misiones lunares, una trayectoria de tipo *free return* proporciona un retorno a la Tierra sin maniobras adicionales después del impulso inicial. En este tipo de trayectoria, la nave espacial necesita solo un impulso inicial para ponerla en rumbo hacia la Luna y, a partir de ahí, se mueve únicamente bajo la acción de la gravedad mutua de los astros. Manteniéndose en curso, rodea la Luna y eventualmente regresa a la Tierra. Este tipo de trayectoria fue utilizado en misiones como Apollo 8, 10 y 11 de la NASA. Durante este movimiento de ida a la Luna y vuelta a la Tierra, la nave traza una figura similar a un número 8, como ilustra el plano orbital de la misión Apollo 8 a continuación.

APOLLO 8 ORBIT PROFILE



Plano orbital de Apollo 8. Fuente: NASA, Apollo 8 Press Kit, 1968, Release No. 68-208

En este problema, adoptamos un modelo simplificado en el que el “ocho” se representa por dos elipses **A** y **B** conectadas en un punto sobre la línea Tierra–Luna, como muestra el esquema siguiente.



Las flechas indican el sentido de movimiento de la nave. $T \rightarrow$ Tierra y $L \rightarrow$ Luna.

Considere una misión lunar hipotética en la que la nave se encuentra inicialmente en órbita circular geocéntrica, en el plano de la figura. En el punto P , es impulsada hacia el perigeo de la trayectoria elíptica **A**, con foco en la Tierra. Durante el movimiento en **A**, considere solo la atracción gravitatoria de la Tierra. En cierto momento, la nave alcanza el punto de influencia gravitatoria dominante de la Luna, definido como el punto de conexión entre las dos elipses. En ese instante, considere que la influencia gravitatoria sobre la nave pasa **instantáneamente** de la Tierra a la Luna. La nave entonces, **sin cambio en su vector velocidad**, pasa a moverse en la trayectoria elíptica **B**, con foco en la Luna. Durante el movimiento en **B**, considere solo la atracción gravitatoria de la Luna. Nótese que, en este modelo, la energía mecánica de la nave no se conserva en la transición de **A** a **B**.

Resuelva el problema en el marco geocéntrico y desprecie el movimiento de la Luna respecto de la Tierra durante el movimiento de la nave en la trayectoria **B**.

- (a) **(3 puntos)** Considere que el cohete utilizado para llevar la nave hasta su órbita circular inicial parte desde el reposo y posee una sola etapa de combustión de propelente. Al final de la combustión, la velocidad del cohete es exactamente la velocidad orbital de la nave en su órbita circular inicial. La ecuación de Tsiolkovsky proporciona la variación de velocidad Δv del cohete en función de las masas inicial y final m_i y m_f del sistema y de la velocidad de eyección v_e del propelente:

$$\Delta v = v_e \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right)$$

Dado que $m_i/m_f = 6,00$ y $v_e = 4,35$ km/s, calcule la altitud de la órbita, en km.

- (b) **(3 puntos)** Siendo el punto de conexión aquel en que la intensidad de la fuerza de atracción gravitatoria de la Luna es 3,00 veces mayor que la atracción de la Tierra, determine su posición indicando las distancias al centro de la Tierra y al centro de la Luna, en km.
- (c) **(9 puntos)** Determine el tiempo total de viaje hasta la Luna, es decir, desde el perigeo de la órbita **A** hasta el apogeo de la órbita **B**, en días.

Solución:

- (a) Usando la ecuación de Tsiolkovsky:

$$\Delta v = v_e \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) = 4,35 \ln(6,00) \approx 7,7942 \text{ km/s.}$$

Como el cohete parte del reposo, la variación de velocidad ya corresponde a la velocidad en la órbita circular. Además, la velocidad en órbita circular está dada por

$$v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}}$$

Luego, la altitud h es:

$$h = \frac{GM_{\oplus}}{v_{\text{circ}}^2} - R_{\oplus} = \frac{6,674 \times 10^{-11} \times 5,972 \times 10^{24}}{(7,8023 \times 10^3)^2} - 6,371 \times 10^6 \\ \approx 1,90 \times 10^5 \text{ m}$$

Por lo tanto, $h \approx 190 \text{ km}$.

- (b) Sea $D = 3,844 \times 10^5$ km la distancia Tierra-Luna. Denote por x la distancia del punto de conexión al *centro de la Luna* (luego, su distancia al *centro de la Tierra* es $D - x$).

Por el módulo de la ley de gravitación, en el punto pedido vale

$$F_{\text{L}} = 3 F_{\text{T}} \implies \frac{G M_{\text{L}}}{x^2} = 3 \frac{G M_{\oplus}}{(D - x)^2},$$

donde $M_{\oplus} = 5,972 \times 10^{24}$ kg es la masa de la Tierra y $M_{\text{L}} = 7,346 \times 10^{22}$ kg la masa de la Luna. Cancelando G y aislando x :

$$\frac{(D - x)^2}{x^2} = 3 \frac{M_{\oplus}}{M_{\text{L}}} \implies \frac{D - x}{x} = \sqrt{3 \frac{M_{\oplus}}{M_{\text{L}}}} \implies x = \frac{D}{1 + \sqrt{3 M_{\oplus}/M_{\text{L}}}}.$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\sqrt{3 \frac{M_{\oplus}}{M_{\zeta}}} = \sqrt{3 \frac{5,972 \times 10^{24}}{7,346 \times 10^{22}}} \approx 15,62, \quad \Rightarrow \quad x \approx \frac{3,844 \times 10^5}{1 + 15,62} \text{ km} \approx 2,313 \times 10^4 \text{ km}.$$

Por lo tanto,

$$\text{Distancia al centro de la Luna: } x \approx 2,31 \times 10^4 \text{ km}$$

$$\text{Distancia al centro de la Tierra: } D - x \approx 3,61 \times 10^5 \text{ km}$$

- (c) El tiempo total de ida hasta la Luna será la suma del tiempo empleado en media órbita en la trayectoria elíptica **A** (perigeo $\rightarrow$ punto de conexión) con media órbita en la trayectoria elíptica **B** (apolunio en el punto de conexión $\rightarrow$ perilunio). Vamos a encontrarlos por separado.

(i) Tiempo en la trayectoria elíptica A:

El semieje mayor de la elipse **A** es:

$$a_A = \frac{r_p^{(A)} + r_a^{(A)}}{2} = 1,8393 \times 10^8 \text{ m}$$

Con $r_p^{(A)} = R_{\oplus} + h = 6,561 \times 10^3 \text{ km}$ y $r_a^{(A)} = D - x = 3,613 \times 10^5 \text{ km}$. Por lo tanto, por la 3ª Ley de Kepler, el período de la órbita **A**, y por tanto el tiempo de media órbita es:

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{a_A^3}{GM_{\oplus}}} \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{T_A}{2} = \pi \sqrt{\frac{a_A^3}{GM_{\oplus}}}.$$

Numéricamente,

$$t_A = \pi \sqrt{\frac{(1,8393 \times 10^8)^3}{6,674 \times 10^{-11} \times 5,972 \times 10^{24}}} \approx 3,9253 \times 10^5 \text{ s} \approx 4,54 \text{ días}.$$

(ii) Tiempo en la trayectoria elíptica B:

La velocidad en ese punto (tangencial) es la de la elipse **A** en el apogeo, igual a la del apoastro lunar de **B**.

Usando la ecuación vis-viva, la velocidad de la nave en el apogeo de **A** es:

$$v_a^{(A)} = \sqrt{GM_{\oplus} \left(\frac{2}{r_a^{(A)}} - \frac{1}{a_A} \right)} \approx 1,9837 \times 10^2 \text{ m/s}$$

Y, en el apoastro de **B**, análogamente:

$$v_a^{(B)} = \sqrt{GM_{\zeta} \left(\frac{2}{r_a^{(B)}} - \frac{1}{a_B} \right)} \Rightarrow \frac{1}{a_B} = \frac{2}{r_a^{(B)}} - \frac{(v_a^{(B)})^2}{GM_{\zeta}},$$

Nótese que el apoastro de **B** es $r_a^{(B)} = x = 2,313 \times 10^4 \text{ km}$, del ítem (a). Ahora, usamos el hecho de que, en el modelo considerado, el **vector velocidad en el punto de conexión no cambia**

en la transición entre A y B. Por lo tanto, $v_a^{(A)} = v_a^{(B)}$ y podemos sustituir el valor hallado de $v_a^{(A)}$ en la ecuación anterior para calcular a_B :

$$a_B = \frac{1}{\frac{2}{2,3130 \times 10^7} - \frac{(1,9837 \times 10^2)^2}{6,674 \times 10^{-11} \times 7,346 \times 10^{22}}} \approx 1,2748 \times 10^7 \text{ m}$$

Por la 3ª Ley de Kepler para la elipse **B**, su período y el tiempo de media órbita es:

$$T_B = 2\pi\sqrt{\frac{a_B^3}{GM_\zeta}} \implies t_B = \frac{T_B}{2} = \pi\sqrt{\frac{a_B^3}{GM_\zeta}}.$$

Numéricamente,

$$t_B = \pi\sqrt{\frac{(1,2748 \times 10^7)^3}{6,674 \times 10^{-11} \times 7,346 \times 10^{22}}} \approx 6,4579 \times 10^4 \text{ s} \approx 0,747 \text{ días.}$$

(iii) Tiempo total hasta la Luna:

Por último, el tiempo total de viaje hasta la Luna es:

$$t_{\text{total}} = t_A + t_B \approx 4,54 \text{ días} + 0,747 \text{ días} \approx \boxed{5,29 \text{ días.}}$$

Rúbrica de corrección (15 puntos)

- (a) + **1p** usar la ecuación de Tsiolkovsky para hallar la variación de velocidad del cohete
 + **0,5p** notar que $\Delta v = v_{\text{circ}}$.
 + **1p** velocidad en órbita circular a una altitud h : $v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}}$.
 + **0,5p** valor numérico correcto $h \approx 190$ km
- (b) + **1p** plantear correctamente la condición $F_{\zeta} = 3F_{\oplus}$ en función de las masas de los astros y distancias involucradas.
 + **1p** desarrollar y aislar $x = \frac{D}{1 + \sqrt{3M_{\oplus}/M_{\zeta}}}$ (o equivalente).
 + **1p** valor numérico correcto para la distancia al centro de la Luna $x \approx 2,31 \times 10^4$ km.
 + **1p** valor numérico correcto para la distancia al centro de la Tierra $D - x \approx 3,61 \times 10^5$ km.
- (c) + **0,5p** obtener el semieje mayor (a_A) de la elipse **A**.
 + **1p** utilizar la Tercera Ley de Kepler para expresar el período T_A de la órbita **A**.
 + **1p** usar la ecuación vis-viva para obtener la velocidad en el apogeo de la órbita **A** $v_a^{(A)}$.
 + **1p** usar la ecuación vis-viva para obtener la velocidad en el apogeo de la órbita **B** $v_a^{(B)}$.
 + **2p** usar la continuidad de la velocidad $v_a^{(A)} = v_a^{(B)}$ para aislar el semieje mayor a_B de la órbita **B**.
 + **1p** utilizar la Tercera Ley de Kepler para expresar el período T_B de la órbita **B**.
 + **2p** notar que el tiempo de viaje hasta la Luna es medio período en **A** más medio período en **B**.
 + **0,5p** valor numérico correcto para el tiempo hasta el perilunio: $t \approx 5,29$ días.

Q6. Observación Solar (20 puntos)

Un astrónomo aficionado en la Tierra, entusiasmado con la intensa actividad solar en 2025, instala un filtro H-alfa en su telescopio para observar erupciones y manchas solares. Su telescopio cuenta también con un pequeño detector CCD. **Datos:** Diámetro de la apertura del telescopio $D = 20$ cm.

Esta cuestión está dividida en dos partes que pueden resolverse de manera independiente.

Parte 1 (13 puntos):

- (a) (**2 puntos**) La *Radiancia Espectral* $B(\lambda, T)$, es decir, la potencia emitida por unidad de área, por unidad de longitud de onda y por unidad de ángulo sólido de un cuerpo negro, está dada por la Ley de Planck:

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}].$$

Dado que la superficie del Sol se comporta aproximadamente como un cuerpo negro, calcule la **Radiancia Espectral del Sol en la longitud de onda H-alfa**, en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$.

- (b) (**4 puntos**) El *Flujo Espectral* es la potencia de luz recibida por unidad de área y por unidad de longitud de onda, teniendo en cuenta todo el espacio que la fuente ocupa en el cielo. En este contexto, calcule

el **Flujo Espectral del Sol en $\lambda_{H\alpha}$ que llega a la Tierra**, en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{m}^{-1}$ (desprecie la absorción atmosférica). **Pista:** calcule el ángulo sólido subtendido por el Sol visto desde la Tierra.

- (c) **(7 puntos)** La curva de transmisión del filtro H-alfa usado por el astrónomo se presenta en la figura siguiente.

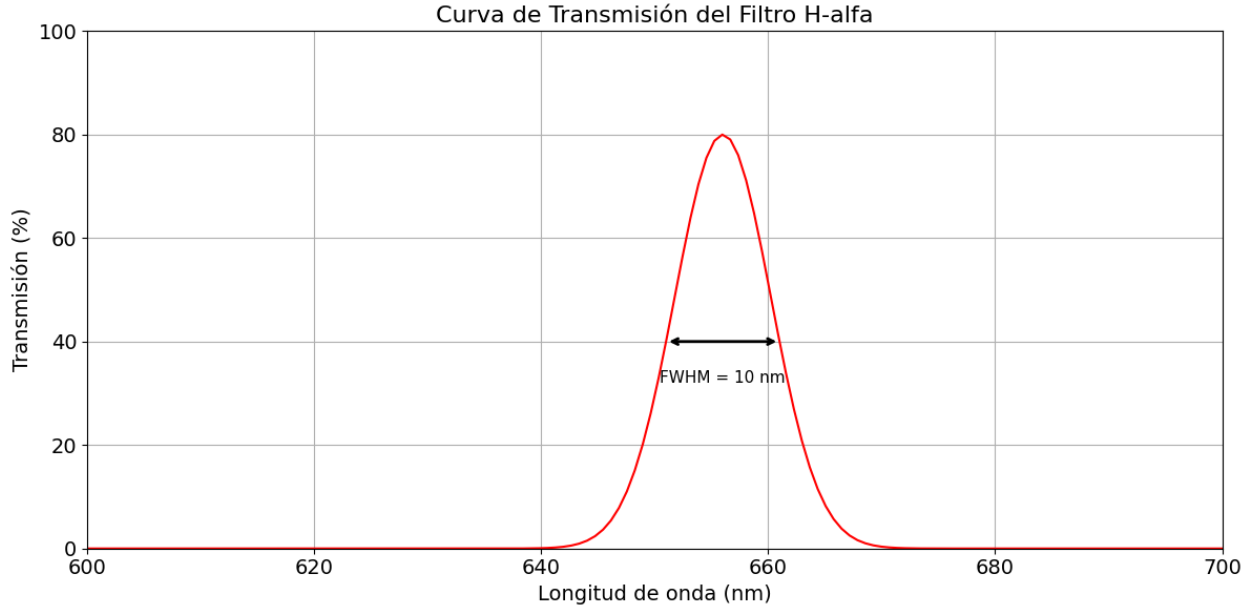


Figura 1: Curva de transmisión del filtro, centrado en 656,3 nm, utilizado por el astrónomo.

El eje Y del gráfico muestra el porcentaje de luz incidente que el filtro permite pasar para cada longitud de onda. El FWHM (*Full Width at Half Maximum*) representa simplemente la banda espectral $\Delta\lambda$ observada, que corresponde al intervalo de longitudes de onda transmitidas alrededor de la línea H-alfa. Considerando que toda la luz recogida por el telescopio alcanza el CCD, calcule el **número de fotones** N_f de longitud de onda $\lambda_{H\alpha}$ que llegan al CCD tras una exposición de $\Delta t = 1$ segundo.

Parte 2 (7 puntos):

El astrónomo consigue fotografiar una erupción solar usando su telescopio reflector $f/5$.

Ansioso por clasificar la erupción solar observada, el astrónomo necesita calcular el área angular del evento, analizando los datos de la imagen obtenida por su CCD. El CCD tiene 1024×1024 píxeles, cada uno con $15 \mu\text{m} \times 15 \mu\text{m}$ de área.

- (d) **(1,5 puntos)** Calcule la **resolución angular θ en H-alfa del telescopio** en segundos de arco (arcsec).
 (e) **(3 puntos)** Calcule su **escala de placa** en segundos de arco por micrómetro (arcsec/ μm).
 (f) **(2,5 puntos)** La erupción solar ocupa una región cuadrada de 20 píxeles $\times$ 20 píxeles en el CCD. ¿Cuál es el **área angular** en arcsec²?

Solución:

- (a) La Radiancia Espectral del Sol está dada por la Ley de Planck:

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

Como $T = T_S = 5772 \text{ K}$ y $\lambda = 656,3 \text{ nm}$:

$$B(\lambda, T) \approx 2,24 \times 10^{13} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$$

- (b) Para calcular la fracción de esa radiación que escapa de la superficie solar y llega a la Tierra, multiplicamos $B(\lambda, T)$ por el ángulo sólido subtendido por el Sol en la Tierra:

$$F(\lambda) = B(\lambda, T) \cdot \pi \left(\frac{R_S}{d_{\text{Tierra-Sol}}} \right)^2 \Rightarrow F(\lambda) \approx 1,53 \times 10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}$$

- (c) El número de fotones para la longitud de onda H-alfa puede calcularse como:

$$N_f = \frac{\text{Energía total}}{\text{Energía del fotón}}$$

De la curva de transmisión, concluimos que la transmisión en $656,3 \text{ nm}$ es del 80% y que la banda espectral observada es $\Delta\lambda = 10 \text{ nm}$ (FWHM). Luego:

$$N_f = \frac{0,80 \cdot F(\lambda) \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \Delta\lambda \cdot \Delta t}{\frac{hc}{\lambda}} \Rightarrow N_f \approx 1,26 \times 10^{18}$$

- (d) La resolución angular θ del telescopio está dada por el criterio de Rayleigh:

$$\theta [\text{rad}] = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

Como $\lambda_{H\alpha} = 656,3 \text{ nm}$, $D = 20 \text{ cm}$ y $1 \text{ rad} = 206265 \text{ arcsec}$:

$$\theta = 1,22 \times \frac{656,3 \times 10^{-9}}{20 \times 10^{-2}} \approx 4,00 \times 10^{-6} \text{ rad} \approx 0,83 \text{ arcsec}$$

- (e) Como el telescopio es $f/5$ y el diámetro es $D = 20 \text{ cm}$, su distancia focal f es:

$$\frac{f}{D} = 5 \Rightarrow f = 100 \text{ cm}$$

Con esto, la escala de placa p del telescopio es:

$$p = \frac{1}{f} = 0,01 \text{ rad/cm} = 1 \times 10^{-6} \text{ rad}/\mu\text{m}$$

Como $1 \text{ rad} = 206265 \text{ arcsec}$, tenemos:

$$p = 0,206265 \text{ arcsec}/\mu\text{m}$$

- (f) Como el área de cada píxel es $15 \mu\text{m} \times 15 \mu\text{m}$, el área de cielo cubierta por cada píxel es:

$$(15 \mu\text{m})^2 \times (0,206265 \times 10^{-6} \text{ arcsec}/\mu\text{m})^2 \approx 9,57 \text{ arcsec}^2/\text{píxel}$$

Como el área ocupada por la erupción es de $20 \times 20 = 400$ píxeles, el tamaño angular de la erupción es:

$$400 \times 9,57 = 3828 \text{ arcsec}^2 (\approx 62 \text{ arcsec} \times 62 \text{ arcsec})$$

Rúbrica de Corrección (20 puntos)

- (a) + **0,5p** elegir lo valor correcto de λ : 656,3 nm. + **0,5p** elegir lo valor correcto de T : 5772 K. + **0,5p** obtener $B(\lambda, T) \approx 2,29 \times 10^{13} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$ con unidades.
- (b) + **2p** calcular el ángulo sólido del Sol visto desde la Tierra: $\Omega_S = \pi \left(\frac{R_S}{d_{\text{Tierra-Sol}}} \right)^2 \text{ sr}$. + **1,5p** indicar que el flujo espectral será la radiancia espectral multiplicada por el ángulo sólido: $F(\lambda) = B(\lambda, T) \cdot \Omega_S$. + **0,5p** obtener $F(\lambda) \approx 1,55 \times 10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}$.
- (c) + **1p** indicar que $N_f = \frac{\text{Energía total}}{\text{Energía del fotón}}$. + **4p** expresión correcta de $E_{\text{total}} = 0,80 \cdot F(\lambda) \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \Delta\lambda \cdot \Delta t$. + **1,5p** energía del fotón: $E_f = \frac{hc}{\lambda}$. + **0,5p** resultado numérico $N_f \approx 1,29 \times 10^{18}$.
- (d) + **1p** criterio de Rayleigh: $\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$. + **0,5p** resultado $\theta \approx 0,83 \text{ arcsec}$.
- (e) + **1p** hallar la distancia focal $f = 5D$. + **1,5p** escala de placa $p = 1/f$. + **0,5p** resultado $p = 0,206265 \text{ arcsec}/\mu\text{m}$.
- (f) + **2p** usar la escala de placa y el tamaño del píxel para hallar el área angular. + **0,5p** resultado $3828 \text{ arcsec}^2 (\approx 62 \times 62)$.

Q7. Estrella hiperveloz con el Perkin-Elmer (20 puntos)

Referencia: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2020MNRAS.491.2465K/abstract>

Las estrellas hiperveloz son estrellas que se mueven a velocidades tan altas que pueden escapar de la gravedad de la galaxia de la que se originaron. Pueden revelarnos mucho sobre la dinámica de galaxias y agujeros negros supermasivos. Por ejemplo, se sugiere que la estrella S5-HVS1, una de las más veloces ya registradas, fue originalmente parte de un sistema binario, del cual fue violentamente eyectada por las fuerzas de marea del agujero negro supermasivo Sagittarius A* en el centro de nuestra galaxia. Considere los siguientes datos de S5-HVS1:

- Magnitud absoluta: $M = 1,4$.
- Magnitud aparente: $m = 16,1$
- Movimiento propio: $\mu = 35,3 \text{ mas/año}$.
- Módulo de la velocidad espacial total: $V = 1,7 \times 10^3 \text{ km/s}$.

Suponga un escenario en el cual astrónomos deciden monitorear esta estrella utilizando el mayor telescopio en suelo brasileño: el Perkin-Elmer, ubicado en el Observatorio do Pico dos Dias (OPD), en Brazópolis, Minas Gerais. El telescopio posee un diámetro de 1,6 m.

- (a) (**4 puntos**) Calcule (i) la distancia hasta la estrella actualmente (d_0), en kpc (kilopársecs) y (ii) el módulo de su velocidad radial actual (V_r), en km/s.
- (b) (**3 puntos**) Considerando que el ojo humano posee una magnitud límite de +6 mag y una pupila de diámetro 6 mm en buenas condiciones de observación, calcule la magnitud límite del telescopio Perkin-Elmer teniendo en cuenta sólo su diámetro.
- (c) (**7 puntos**) Sabiendo que S5-HVS1 se mueve en línea recta con velocidad constante de módulo V y alejándose de nosotros, muestre que la expresión literal para la distancia de la estrella a nosotros en función del tiempo (siendo hoy $t = 0$) está dada por

$$d(t) = \sqrt{d_0^2 + V^2 t^2 + 2 d_0 V_r t}$$

- (d) **(6 puntos)** Por último, estime por cuántos millones de años nuestros astrónomos (y sus sucesores) podrían observar la estrella hasta que se torne demasiado débil para ser observada con el Perkin–Elmer.

Solución:

- (a) (i) Por el módulo de distancia (con d_0 en pc):

$$m - M = 5 \log_{10} d_0 - 5 \Rightarrow d_0 = 10^{\frac{m-M+5}{5}} \text{ pc.}$$

Con $m - M = 16,1 - 1,4 = 14,7$,

$$d_0 = 10^{\frac{14,7+5}{5}} = 10^{3,94} \text{ pc} \approx 8,71 \times 10^3 \text{ pc} = \boxed{8,7 \text{ kpc}}.$$

(ii) Para hallar la velocidad radial, primero convertimos el movimiento propio total a radianes por segundo ($1 \text{ rad} = 206265'' \rightarrow 1'' = 4,848 \times 10^{-6} \text{ rad}$):

$$\mu = 35,3 \times 4,848 \times 10^{-9} \text{ rad/año} \approx 5,42 \times 10^{-15} \text{ rad/s.}$$

La distancia es $d_0 = 8,7 \text{ kpc} = 2,69 \times 10^{17} \text{ km}$, recordando que $1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{13} \text{ km}$. Luego, la velocidad tangencial es:

$$V_t = \mu d_0 = (5,42 \times 10^{-15})(2,69 \times 10^{17}) \approx 1460 \text{ km/s.}$$

Como la velocidad espacial total es la suma pitagórica entre la radial y la tangencial, la velocidad radial está dada por:

$$V_r = \sqrt{V^2 - V_t^2} = \sqrt{(1700)^2 - (1460)^2} \approx \boxed{940 \text{ km/s}}.$$

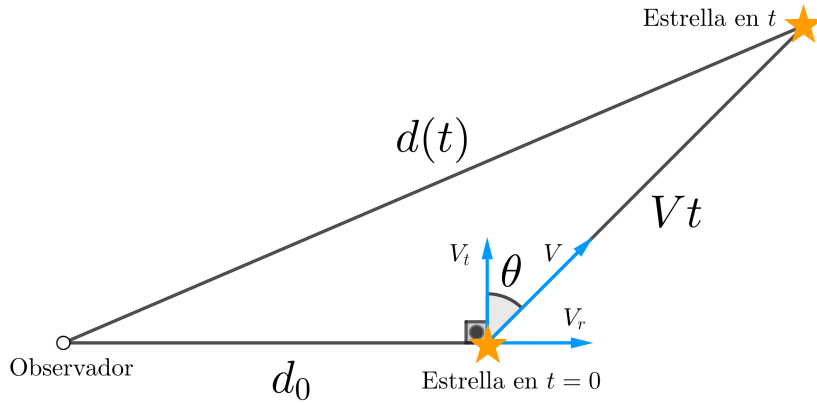
- (b) La ganancia en magnitud por diámetro está dada por:

$$\begin{aligned} \Delta m &= -2,5 \log_{10} \left(\frac{D_{\text{ojo}}^2}{D_{\text{tel}}^2} \right) = 5 \log_{10} \left(\frac{D_{\text{tel}}}{D_{\text{ojo}}} \right) \\ &= 5 \log_{10} \left(\frac{1600}{6} \right) \approx 5 \times 2,42597 \approx 12,1298. \end{aligned}$$

Como el ojo llega hasta +6 mag, el límite estimado por el diámetro del telescopio es

$$m_{\text{lim}} \approx 6,0 + \Delta m \approx \boxed{18,1 \text{ mag}}.$$

- (c) Esquema de la geometría de la situación:



Considere el triángulo formado por tres segmentos: el lado d_0 (posición inicial), el lado Vt (desplazamiento de la estrella) y el lado $d(t)$ (nueva distancia hasta nosotros). Por la ley de los cosenos aplicada al triángulo anterior en el lado $d(t)$ opuesto al ángulo $90^\circ + \theta$, tenemos

$$d(t)^2 = d_0^2 + (Vt)^2 - 2d_0(Vt)\overbrace{\cos(90^\circ + \theta)}^{-\sin \theta} = d_0^2 + V^2t^2 + 2d_0Vt \sin \theta.$$

La componente radial de la velocidad es $V_r = V \sin \theta$; luego,

$$d(t)^2 = d_0^2 + V^2t^2 + 2d_0V_r t, \quad \Rightarrow \quad d(t) = \sqrt{d_0^2 + V^2t^2 + 2d_0V_r t}.$$

- (d) La estrella está hoy en $m = 16,1$. Para salir del límite de observación, su magnitud necesita un aumento de $\Delta m = m_{\text{lim}} - m = 18,1 - 16,1 = 2,0$ mag.

Ahora, encontremos la distancia a la que estará la estrella cuando su magnitud aumente en Δm ; llámela d . Siendo $F \propto 1/d^2$ el flujo observado de la estrella en el límite de observación y $F_0 \propto 1/d_0^2$ su flujo hoy, tenemos, comparando magnitudes:

$$\Delta m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F}{F_0} \right) = -5 \log_{10} \left(\frac{d}{d_0} \right)$$

Aislando d :

$$\frac{d}{d_0} = 10^{\Delta m/5} = 10^{0,40} \approx 2,51, \quad \Rightarrow \quad d \approx 2,51 d_0 \approx 2,51 \times 8,71 \approx 21,9 \text{ kpc}.$$

Ahora, queremos hallar el tiempo t tal que la distancia sea d . Usando el resultado del ítem anterior:

$$d = \sqrt{d_0^2 + 2d_0V_r t + V^2t^2} \quad \Rightarrow \quad V^2t^2 + 2d_0V_r t + d^2 - d_0^2 = 0$$

Dividiendo por V^2 e insertando los valores numéricos para las distancias en km y las velocidades en km/s, obtenemos una ecuación con t en segundos:

$$t^2 + \frac{2 \times 2,69 \times 10^{17} \times 940}{(1,7 \times 10^3)^2} t + \frac{8,7^2 - 21,9^2}{(1,7 \times 10^3)^2} \times (3,086 \times 10^{16})^2 = 0$$

$$t^2 + 1,747 \times 10^{14} t - 1,327 \times 10^{29} = 0$$

Resolviendo la ecuación, las soluciones son:

$$t = \frac{-1,747 \times 10^{14} \pm 7,493 \times 10^{14}}{2} \text{ s}$$

$$t_+ \approx 2,87 \times 10^{14} \text{ s}, \quad t_- \approx -4,62 \times 10^{14} \text{ s}.$$

Como contamos a partir de $t = 0$, buscamos la raíz positiva t_+ . Luego, en años, $t = 2,87 \times 10^{14} \text{ s} \approx 9,1 \times 10^6 \text{ años}$. Entonces, los astrónomos podrían observar la estrella por un tiempo de aproximadamente **9 millones de años**.

Rúbrica de Corrección (20 puntos)

- (a) + **1p** hacer uso del módulo de distancia
 - + **0,5p** valor numérico correcto para d_0 en kpc
 - + **1p** usar la definición de movimiento propio $V_t = \mu d_0$ para calcular V_t
 - + **1p** escribir $V_r = \sqrt{V^2 - V_t^2}$
 - + **0,5p** valor numérico correcto para V_r
- (b) + **2p** expresión correcta que relacione la ganancia de magnitud (o la magnitud límite directamente) con los diámetros del ojo y del telescopio, **-1p** si no se relacionó correctamente el flujo captado con el área del detector (por ejemplo, se utilizó solo la razón de los diámetros al comparar la magnitud límite).
 - + **1p** valor numérico correcto para la magnitud límite
- (c) + **3p** dibujo que esquematice la geometría de la situación (ángulos y distancias relevantes para la solución claramente indicados, **-1,5p** si está incompleto).
 - + **2p** aplicar la ley de los cosenos (o teorema de Pitágoras) para encontrar $d(t)$
 - + **2p** relacionar el ángulo θ (o equivalente) con la velocidad radial mediante $V_r = V \sin \theta$ (o equivalente) para eliminar su dependencia
- (d) + **1p** comparar las magnitudes para obtener la distancia final d (la expresión literal es suficiente)
 - + **1,5p** utilizar la expresión del ítem anterior para obtener una ecuación cuadrática en t de la forma $at^2 + bt + c = 0$ (la expresión literal es suficiente)
 - + **1,5p** sustituir la distancia final d y resolver para el tiempo de observación t
 - + **1p** explicitar la elección de la raíz positiva como respuesta correcta
 - + **1p** valor numérico correcto para t en millones de años (notación científica con 10^6 es aceptable. **-0,5p** si la unidad es incorrecta)