

Instruções Gerais

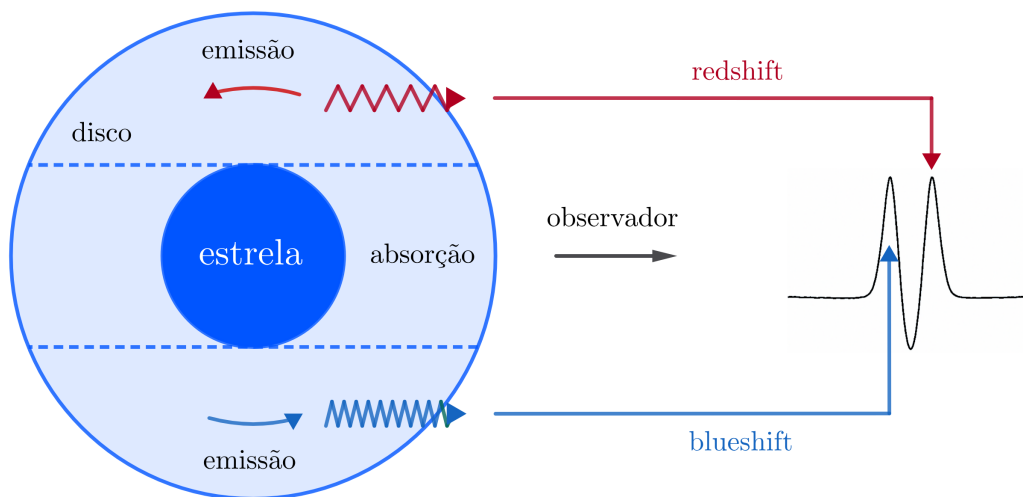
Leia atentamente antes de começar a prova

- Escreva o seu código de estudante no topo de cada página.
- Resolva cada problema em uma folha individual. Se utilizar mais de uma página para o mesmo problema, escreva claramente o número do problema em cada página e enumere as folhas em ordem consecutiva.
Exemplo: se o Problema 1 ocupar três páginas, indique em cada folha: Problema 1 (1/3), Problema 1 (2/3) e Problema 1 (3/3).
- Apresente o procedimento completo, claro e organizado em cada solução.
- A vírgula (,) deve ser utilizada como separador decimal.
- Caso deseje invalidar uma parte da solução, indique explicitamente que ela não deve ser considerada para a correção (por exemplo, com um grande "X" ou riscando a seção correspondente).
- Faça um retângulo ao redor da resposta final de cada item dos problemas.
- Levante a mão para solicitar folhas adicionais ou pedir permissão para ir ao banheiro.
- Ao final da prova, verifique se todas as instruções anteriores foram cumpridas e entregue suas folhas na ordem correspondente aos problemas.

Boa sorte!

Q1. Disco de gás em Estrelas Be (20 pontos)

Estrelas do tipo Be são estrelas de classe espectral B caracterizadas pela presença de linhas de emissão no seu espectro devido à presença de um disco fino de gás ao redor da estrela, originado pela sua intensa rotação. Na situação em que o sistema está inclinado em relação à linha de visada do observador, a rotação do disco introduz um pico de emissão duplo no espectro devido ao efeito Doppler: a parte do disco que se aproxima do observador desloca o comprimento de onda da linha para o azul (*blueshift*), enquanto a parte que se afasta desloca para o vermelho (*redshift*), conforme mostra o esquema abaixo.



Esquema didático do fenômeno de duplo pico no espectro. Na esquerda, temos uma vista superior do sistema para um disco *edge-on* (inclinação $i = 90^\circ$), com as regiões emissoras responsáveis pelo redshift e blueshift que geram o pico duplo no espectro, que está esboçado à direita. As setas curvas indicam o sentido de rotação do gás. A região entre a estrela e o observador é de absorção, causando o mínimo central no espectro.

Nesta questão, analisaremos o espectro de uma estrela Be ao redor da linha de Balmer $H\alpha$ para estimar a velocidade de rotação do disco e o raio característico da região emissora. A tabela abaixo contém dados espectrais da estrela 88 Her, em termos do fluxo formalizado F/F_c e comprimento de onda λ (em nm).

λ (nm)	F/F_c	λ (nm)	F/F_c
655,40	1,03	655,50	1,10
655,60	1,17	655,69	1,28
655,77	1,47	655,86	1,71
655,93	1,82	656,01	1,66
656,07	1,39	656,13	1,09
656,18	0,84	656,23	0,67
656,28	0,57	656,33	0,66
656,37	0,82	656,42	1,09
656,48	1,40	656,54	1,68
656,61	1,77	656,68	1,69
656,75	1,48	656,84	1,28
656,92	1,17	657,01	1,10
657,10	1,04		

Considere que o gás do disco encontra-se em **órbita circular kepleriana** ao redor da estrela, e também que

as velocidades do problema são muito menores que a velocidade da luz de forma a **desconsiderar efeitos relativísticos**. Faça o que se pede. **Dados:** Inclinação do disco: $i = 76^\circ$. $M_* = 4,45 M_\odot$.

- (a) **(4 pontos)** Mostre que, devido ao efeito Doppler, a diferença de comprimento de onda observado dos picos ($\Delta\lambda = \lambda_{\text{vermelho}} - \lambda_{\text{azul}}$) se relaciona com a velocidade de rotação do gás (v_{rot}) e a inclinação (i) do sistema em relação à linha de visada por

$$\Delta\lambda \approx \frac{2 v_{\text{rot}} \sin i}{c} \lambda_0 ,$$

em que λ_0 é o comprimento de onda de repouso da linha.

- (b) **(9 pontos)** Represente os dados espectrais da estrela em um gráfico, plotando F/F_c em função do comprimento de onda λ .
- (c) **(4 pontos)** Com o auxílio do seu gráfico, estime v_{rot} , em km/s, explicando claramente seu método. **Dado:** Inclinação do disco: $i = 76^\circ$. Massa da estrela: $M_* = 4,45 M_\odot$
- (d) **(3 pontos)** Estime o raio (distância ao centro da estrela) característico da região emissora do disco (r_{em}) em km. **Dado:** Massa da estrela: $M_* = 4,45 M_\odot$.

Solução:

- (a) Para velocidades $\ll c$, o Doppler não relativístico nos dá

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \simeq \frac{v_r}{c}.$$

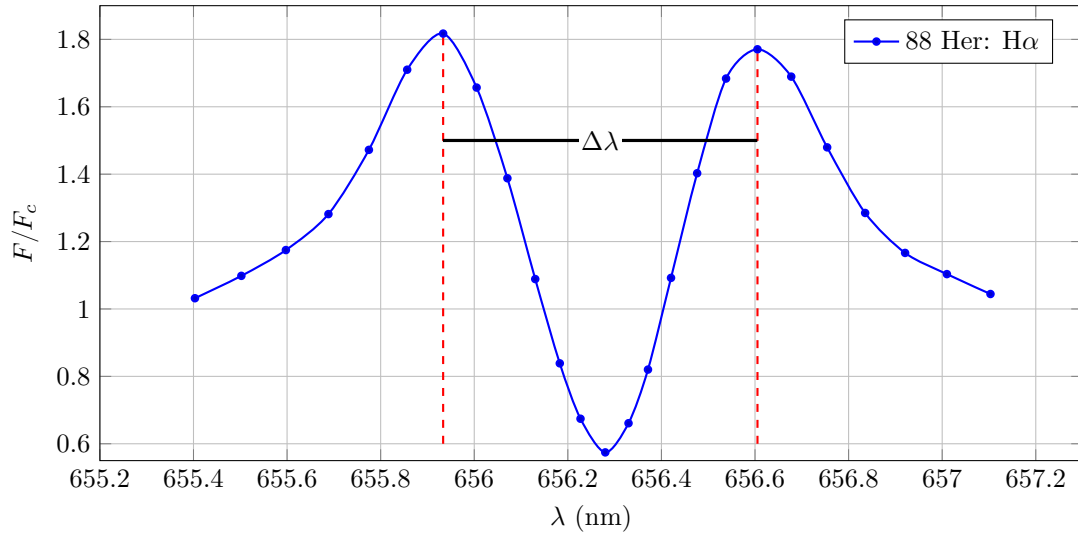
No anel emissor, os pontos de maior módulo de velocidade radial têm $v_r = \pm v_{\text{rot}} \sin i$ (projeção da velocidade tangencial na linha de visada). Assim,

$$\lambda_{\text{azul}} = \lambda_0 \left(1 - \frac{v_{\text{rot}} \sin i}{c} \right), \quad \lambda_{\text{vermelho}} = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_{\text{rot}} \sin i}{c} \right).$$

Logo, a separação entre os picos é

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{vermelho}} - \lambda_{\text{azul}} = 2\lambda_0 \frac{v_{\text{rot}} \sin i}{c} \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda \approx \frac{2 v_{\text{rot}} \sin i}{c} \lambda_0}.$$

- (b) Abaixo, temos o gráfico obtido a partir dos pontos, assim como as retas verticais representando as posições de cada λ :



- (c) Pelos máximos do perfil (linhas tracejadas vermelha no gráfico): $\lambda_{\text{azul}} \approx 655,93 \text{ nm}$, $\lambda_{\text{vermelho}} \approx 656,61 \text{ nm}$. Portanto,

$$\Delta\lambda \approx \lambda_{\text{vermelho}} - \lambda_{\text{azul}} \approx 0,68 \text{ nm}.$$

Note que também é possível medir $\Delta\lambda$ diretamente do gráfico.

Agora, da expressão do item (a),

$$v_{\text{rot}} = \frac{c}{2\lambda_0} \frac{\Delta\lambda}{\sin i}.$$

Usando $c = 2,998 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$, $\lambda_0 = 656,3 \text{ nm}$, $\Delta\lambda = 0,68 \text{ nm}$ e $i = 76^\circ$,

$$v_{\text{rot}} \approx \frac{2,998 \times 10^5}{2 \times 656,3} \frac{0,68}{\sin 76^\circ} \simeq \boxed{1,60 \times 10^2 \text{ km s}^{-1}}.$$

- (d) Assumindo rotação kepleriana, $v_{\text{rot}}^2 = \frac{GM_\star}{r_{\text{em}}} \Rightarrow r_{\text{em}} = \frac{GM_\star}{v_{\text{rot}}^2}$. Com $GM_\odot = 1,327 \times 10^{11} \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ e $M_\star = 4,45 M_\odot$,

$$r_{\text{em}} \approx \frac{4,45 \times (1,327 \times 10^{11})}{(1,60 \times 10^2)^2} \simeq \boxed{2,31 \times 10^7 \text{ km}}.$$

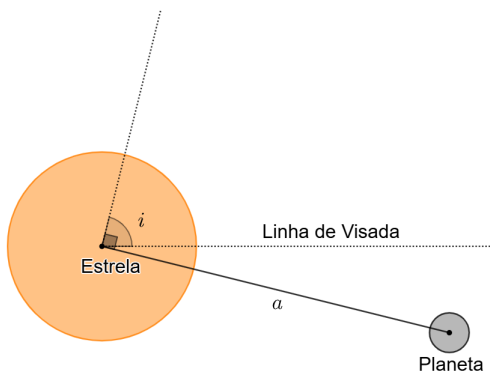
Grade de Correção (20 pontos)

- (a) +1 p escrever relação de Doppler não relativístico $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \simeq \frac{v_r}{c}$..
 +1 p expressão da velocidade radial projetada $v_r = \pm v_{\text{rot}} \sin i$.
 +1 p expressão para λ_{azul} e $\lambda_{\text{vermelho}}$.
 +1 p efetuar a diferença e obter expressão final para $\Delta\lambda$.
- (b) +5 p pontos plotados corretamente. 0,2 para cada ponto.
 +1 p eixo y nomeado e com escala uniforme no domínio do conjunto de dados.
 +1 p eixo x nomeado e com escala uniforme no domínio do conjunto de dados.
 +1,5 p retas verticais representando cada valor de λ requerido. 0,5 para cada reta.
 +0,5 p gráfico com título.
- (c) +2 p valor numérico de $\Delta\lambda = 0,68 \text{ nm}$ obtido a partir do gráfico ou da tabela.
 +1 p expressão para v_{rot} isolando a expressão dada no item (a).
 +1 p valor numérico final correto $v_{\text{rot}} = 1,60 \times 10^2 \text{ km s}^{-1}$.
- (d) +2 p assumir rotação kepleriana e escrever velocidade de rotação em função da massa, raio e constante gravitacional.
 +1 p valor numérico final correto $r_{\text{em}} = 2,31 \times 10^7 \text{ km}$.

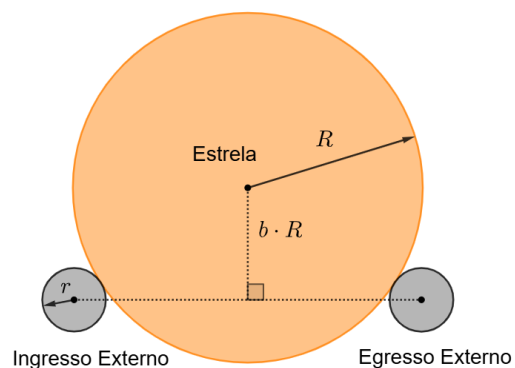
Q2. Exoplaneta em trânsito e escurecimento de borda (20 pontos)

A estrela HD 209458 foi uma das primeiras em que a presença de um planeta foi detectada pelo *método fotométrico de trânsito*, no qual o fluxo luminoso da estrela hospedeira diminui quando o planeta passa em sua frente.

O fenômeno pode ser representado, de forma simplificada, pelas figuras a seguir:



Vista lateral do sistema



Vista frontal do sistema

Vistas esquemáticas do sistema estrela-planeta durante o trânsito

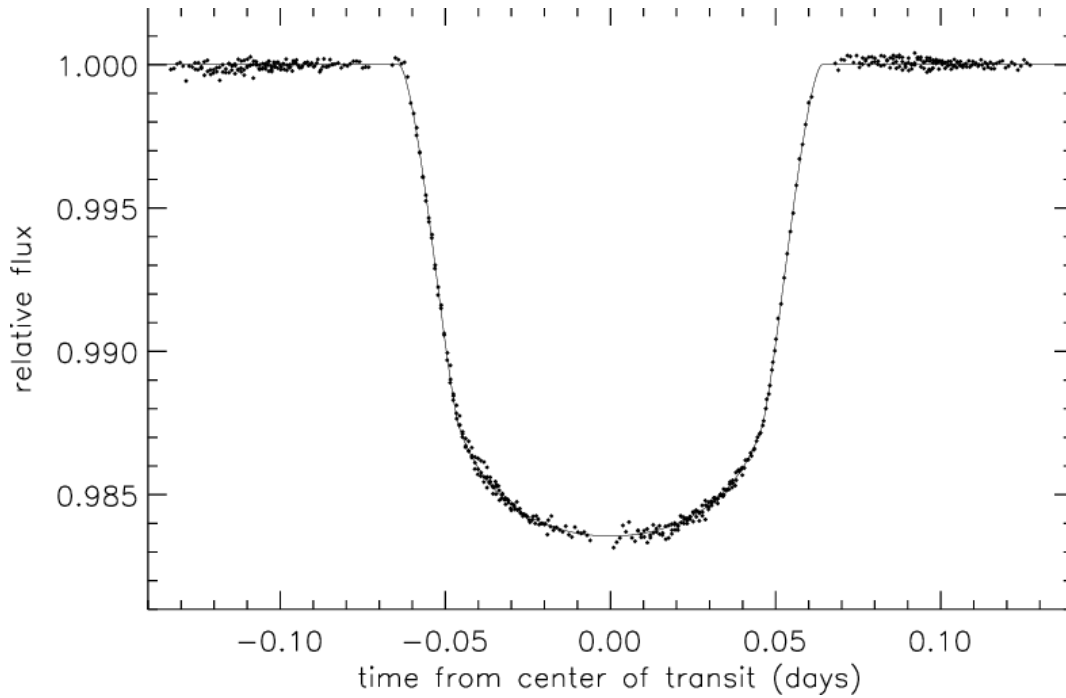
Na notação utilizada, r é o raio do planeta, R é o raio da estrela, a é o semieixo maior da órbita do planeta,

i é o ângulo de inclinação orbital e b o parâmetro de impacto. O parâmetro de impacto é definido como a distância mínima, em unidades de raio estelar, entre o centro do disco estelar e a trajetória projetada do centro do planeta durante o trânsito. Suponha que a órbita do planeta seja circular.

A partir dos diagramas, faça o que se pede nos seguintes itens:

- (1,5 pontos) Escreva uma expressão para b como função do semieixo maior da órbita a , da inclinação i da mesma e do raio R da estrela.
- (5 pontos) Deduza uma expressão para o tempo total de trânsito do planeta, isto é, o intervalo entre o instante em que o planeta toca a borda do disco estelar (ingresso externo) e o instante em que sai completamente do disco (egresso externo) - como representado pela vista frontal do sistema. Escreva sua resposta em função do raio da estrela R , do raio do planeta r , do semieixo maior orbital a , do parâmetro de impacto b , da massa M da estrela e da constante gravitacional universal G .

Observações dessa estrela resultaram na curva de luz mostrada na figura a seguir. No gráfico, o eixo vertical representa o fluxo luminoso normalizado da estrela, enquanto o eixo horizontal mostra o tempo (em dias) em relação ao centro do trânsito.



Curva de luz normalizada do trânsito planetário em HD 209458

Nota-se que, mesmo quando o planeta já está inteiramente dentro do disco estelar, o fluxo observado não se mantém constante. Isso ocorre devido ao **escurecimento de borda** (*limb darkening*), fenômeno em que a intensidade do brilho diminui da região central para as bordas do disco estelar.

Na aproximação linear, a intensidade específica da estrela pode ser escrita como:

$$I(\mu) = I(1) [1 - u(1 - \mu)],$$

onde:

- $I(\mu)$ é a intensidade em uma direção definida por $\mu = \cos \theta$, sendo θ o ângulo entre a normal local à superfície estelar e a linha de visada;
- $I(1)$ é a intensidade no centro do disco estelar ($\mu = 1$);
- u é o coeficiente de escurecimento de bordo, que mede a rapidez com que a intensidade diminui em direção ao limbo.

A intensidade média do disco estelar, considerando essa lei, é dada por:

$$\langle I \rangle = I(1) \left(1 - \frac{u}{3} \right).$$

Para a estrela HD 209458, tem-se $u = 0,84$ e raio $R = 1,20 R_{\odot}$. Ainda, o parâmetro de impacto do planeta que a transita é dado por $b = 0,59$.

- (c) **(8,5 pontos)** Usando a profundidade máxima do trânsito na curva de luz e levando em conta o escurecimento de borda, calcule o raio r do planeta em unidades de raio terrestre. Use que o raio do planeta é consideravelmente menor que o raio da estrela e que, durante o trânsito, a totalidade do disco planetário entra no disco estelar.

Agora, utilizando os parâmetros e expressões obtidos nos itens anteriores (caso não tenha conseguido encontrar o raio do planeta, utilize $r/R = 0,1$), bem como a massa da estrela $M = 1,15 M_{\odot}$, determine:

- (d) **(1 ponto)** O tempo total do trânsito planetário (em horas), do ingresso externo ao egresso externo (vista frontal).
- (e) **(3 pontos)** O período orbital P do planeta (em dias) e o semieixo maior a de sua órbita (em UA).
- (f) **(1 ponto)** A inclinação orbital i do planeta em graus.

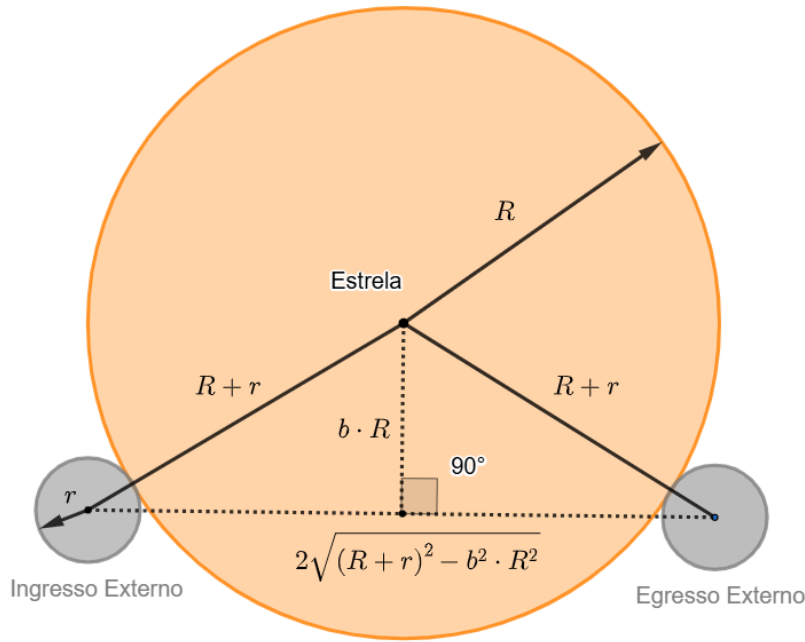
Solução:

- (a) Para uma órbita circular, a distância projetada entre os centros no meio do trânsito é dado por $a \cdot \cos i$. Como b é dado em unidades de raio estelar, temos

$$bR = a \cos i$$

$$b = \frac{a \cos i}{R}$$

- (b) Primeiramente, fazemos a representação frontal do sistema como abaixo:



Representação frontal do sistema

O comprimento da corda interceptada pelo planeta é

$$\mathcal{L} = 2\sqrt{(R+r)^2 - b^2 \cdot R^2} = 2R\sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - b^2}.$$

Temos que a velocidade orbital do planeta é dada por $v = \sqrt{GM/a}$ (órbita circular). Assim,

$$T = \frac{\mathcal{L}}{v} = \frac{2R}{\sqrt{GM/a}} \sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - b^2}$$

- (c) Na aproximação de planeta pequeno, a profundidade normalizada é o fluxo bloqueado sobre o fluxo total do disco. Temos que o fluxo normalizado no momento de mínimo de trânsito é dado por

$$\Delta F = \frac{F_{\text{estrela}} - F_{\text{transito}}}{F_{\text{estrela}}}$$

$$\Delta F = 1 - \frac{F_{\text{transito}}}{F_{\text{estrela}}}$$

Onde F_{estrela} é o fluxo total da estrela sem trânsito e F_{transito} é o fluxo no momento de trânsito. Podemos calcular o fluxo total da estrela sem trânsito usando o valor médio da intensidade do disco $\langle I \rangle$ usando $F = I \cdot A$. Desse modo :

$$F_{\text{estrela}} = \langle I \rangle \cdot A = \langle I \rangle \cdot \pi R^2$$

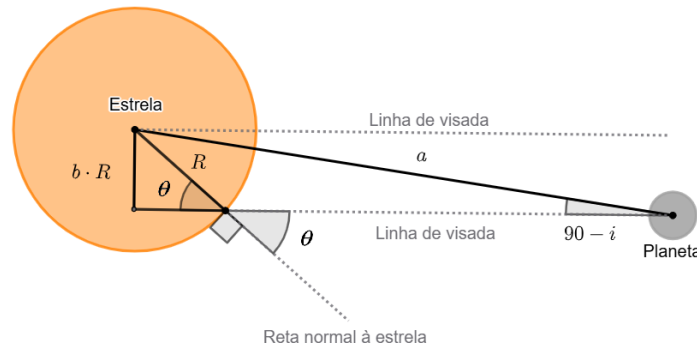
Por sua vez o fluxo de trânsito F_{transito} é dado pelo fluxo total da estrela menos a parte que é ocultada pelo planeta. Como consideramos o disco planetário muito menor que o disco estelar, podemos dizer que o fluxo ocultado pelo planeta é dado por $F_{\text{planeta}} = I(\mu) \cdot \pi r^2$, onde $I(\mu)$ é a intensidade do disco estelar na posição em que o planeta se situa. Sendo assim

$$F_{\text{transito}} = F_{\text{estrela}} - F_{\text{planeta}} = \langle I \rangle \cdot \pi R^2 - I(\mu) \cdot \pi r^2$$

Substituindo na expressão para ΔF as expressões para F_{estrela} e F_{transito} e considerando $k = r/R$, podemos escrever:

$$\Delta F \simeq \frac{\pi r^2 I(\mu)}{\pi R^2 \langle I \rangle} = k^2 \frac{I(\mu)}{\langle I \rangle},$$

A imagem abaixo nos mostra a configuração e a dependência de μ com o parâmetro b :



Representação esquemática lateral do sistema

com $\mu = \cos \theta = \sqrt{1 - \rho^2}$ e $\rho = b$ no meio do trânsito. Para limb darkening linear,

$$I(\mu) = I(1) [1 - u(1 - \mu)], \quad \langle I \rangle = I(1) \left(1 - \frac{u}{3}\right).$$

Logo,

$$\Delta F = k^2 \frac{1 - u(1 - \mu)}{1 - u/3}, \quad \mu = \sqrt{1 - b^2}.$$

Inserindo $u = 0,84$ e $b = 0,59$:

$$\mu = \sqrt{1 - 0,59^2} = 0,8074, \quad \frac{1 - u(1 - \mu)}{1 - u/3} \approx \frac{1 - 0,84(1 - 0,8074)}{1 - 0,84/3} \approx 1,1642.$$

Assim, a partir do gráfico, obtemos $\Delta F = 0,0163$

$$k^2 = \frac{\Delta F}{1,1642} = \frac{0,0163}{1,1642} = 0,01400 \Rightarrow k = \frac{r}{R} = 0,1183.$$

Como $R = 1,20 R_{\odot}$ e $1 R_{\odot} = 109,076 R_{\oplus}$,

$$r = kR = 0,1183 \times 1,20 \times 109,076 R_{\oplus} = 15,5 R_{\oplus}.$$

$$r \approx 15,5 R_{\oplus}$$

(d) De acordo com o gráfico de curva de luz, temos $T = 3,05 \text{ h}$

(e) A equação de $T(a)$ acima (seção b) com o valor observado $T^{(\text{obs})} = 3,05 \text{ h}$ e os parâmetros conhecidos (R, M, b, r) permite resolver a (numericamente):

$$a = \frac{T^2 GM}{4R^2 \left[\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - b^2 \right]}$$

$$a \approx 0,049 \text{ UA} .$$

Alternativamente, utilizando $r/R = 0,1$, obtemos $a = 0,051 \text{ UA}$.

Com este a , pela 3ª lei de Kepler,

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \Rightarrow P \approx 3,67 \text{ dias} .$$

Alternativamente, utilizando $r/R = 0,1$, obtemos $P = 3,94 \text{ dias}$.

(f) De $b = (a \cos i)/R$,

$$\cos i = \frac{bR}{a}, \quad i = \arccos\left(\frac{bR}{a}\right) .$$

Com $b = 0,59$, $R = 1,20 R_{\odot}$ e $a = 0,049 \text{ UA}$,

$$i \approx 86,13^{\circ} .$$

Alternativamente, utilizando $r/R = 0,1$, obtemos $i \approx 86,30^{\circ}$.

Grade de Correção (20 pontos)

- (a) **+1 p** Expressão para distância projetada entre os centros $a \cdot \cos i$
+0,5 p Converter distância projetada para unidades de raio estelar, de modo que $b = a \cdot \cos i / R$
- (b) **+2,5 p** Teorema de Pitágoras para encontrar o comprimento total da corda da trajetória de passagem do planeta
+1 p Expressão correta para velocidade do planeta na órbita $v = \sqrt{GM/a}$
+1 p Relação $T = \mathcal{L}/v$ para tempo total de trânsito
+0,5 p Resposta final correta
- (c) **+1 p** Expressão correta para ΔF em função de $F_{estrela}$ e $F_{transito}$
+1 p Encontrar $F_{estrela} = \langle I \rangle \pi R^2$
+1,5 p Encontrar $F_{transito} = \langle I \rangle \cdot \pi R^2 - I(\mu) \cdot \pi r^2$
+1 p Expressão correta para $\Delta F = k^2 \frac{I(\mu)}{\langle I \rangle}$
+0,5 p Valor de ΔF obtido através do gráfico. Intervalo aceitável: 0,0155 – 0,0170
+0,5 p Figura representando o ângulo θ necessário para o cálculo de $I(\mu)$
+1 p Perceber que ao momento de mínimo de trânsito $\mu = \cos \theta = \sqrt{1 - b^2}$
+0,5 p Valor correto encontrado para $\mu \approx 0,8074$
+0,5 p Substituição dos parâmetros dados e de μ na expressão para ΔF e valor final correto para $r = 15,5R_{\oplus}$. Intervalo aceitável: $15,1R_{\oplus} - 15,8R_{\oplus}$.
- (d) **+1 p** A partir do gráfico, capturar $T_{transito} = 3,05 h$. Intervalo aceitável: $2,95 h - 3,15 h$
- (e) **+1,5 p** Usar expressão obtida no item b) to tempo de trânsito T para obter a
+0,25 p Valor numérico correto para $a = 0,049 \text{ UA}$. Intervalo aceitável: $0,045 \text{ UA} - 0,052 \text{ UA}$. Com $r/R = 0,1$, temos $a = 0,048 \text{ UA} - 0,055 \text{ UA}$
+1 p Usar Terceira Lei de Kepler para relacionar semi-eixo maior a com período P
+0,25 p Valor correto do período $P = 3,67 \text{ dias}$. Intervalo aceitável: $3,30 \text{ dias} - 4,10 \text{ dias}$. Com $r/R = 0,1$, temos $P = 3,56 \text{ dias} - 4,34 \text{ dias}$
- (f) **+0,75 p** Usar expressão do item a) para encontrar expressão para inclinação i em função dos parâmetros já encontrados ou dados
+0,25 p Valor numérico correto para inclinação $i = 86,13^\circ$. Intervalo aceitável: $85,90^\circ - 86,40^\circ$. Com $r/R = 0,1$, temos $i = 86,05^\circ - 86,54^\circ$.

Q3. Satélite do VLS (20 pontos)

O VLS (Veículo Lançador de Satélites) é um programa de foguetes brasileiro desenvolvido com o objetivo de lançar satélites na órbita da Terra. O VLS pretende pôr um satélite de massa $m = 2000 \text{ kg}$ em uma órbita terrestre baixa (LEO, do inglês *Low Earth Orbit*), circular, com altitude $h = 400 \text{ km}$. Satélites nesse tipo de órbita estão sujeitos a um arrasto devido à atmosfera residual, que se torna mais intenso em períodos de atividade solar intensa, devido ao aumento da densidade atmosférica nessa faixa de altitudes.

A força de arrasto sentida pelo satélite devido à atmosfera sempre possui sentido oposto ao seu vetor velo-

cidade. Saiba que o módulo dessa força de arrasto D pode ser calculado por:

$$D = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot C_D \cdot A$$

Onde:

ρ – Densidade da atmosfera.

v – Módulo da velocidade orbital do satélite.

C_D – Coeficiente de arrasto da atmosfera (adimensional).

A – Área de referência do satélite.

- (a) **(3 pontos)** Considerando que o satélite seja colocado em órbita em um período de atividade solar intensa, tal que a densidade da atmosfera na altitude da órbita seja $\rho = 5,00 \times 10^{-11} \text{ kg/m}^3$, calcule a intensidade da força de arrasto D sofrida pelo satélite, em newtons (N). **Dados:** $C_D = 2,07$ e $A = 1,00 \text{ m}^2$.
- (b) **(8 pontos)** Esse arrasto faz com que o satélite perca energia durante sua órbita, resultando em uma perda de altitude. É dado que, para uma pequena variação Δr no seu raio orbital r , a variação correspondente na energia total do satélite é

$$\Delta E \approx \frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2} \cdot \Delta r$$

Sendo $M_{\oplus}$ a massa da Terra. Com isso calcule, em m/s, a velocidade com que o satélite se aproxima da Terra (isto é, a taxa de variação instantânea do seu raio orbital, $\frac{\Delta r}{\Delta t}$) quando ele está a uma altitude de $h = 400 \text{ km}$.

- (c) **(2 pontos)** Assumindo que a taxa de descida do satélite obtida no item anterior é constante, qual a nova altitude h_{90} do satélite após 90 dias em órbita? Caso você não tenha resolvido o item anterior, considere que $\frac{\Delta r}{\Delta t} = -1 \times 10^{-3} \text{ m/s}$.
- (d) **(7 pontos)** Para recolocar o satélite na órbita circular original de altitude $h = 400 \text{ km}$, empregase uma órbita elíptica de transferência (conhecida como órbita de transferência de Hohmann). Essa órbita elíptica tem perigeu no raio da órbita inicial ($r_{90} = R_{\oplus} + h_{90}$) e apogeu no raio da órbita final ($r = R_{\oplus} + h$). A manobra requer que o satélite receba um impulso Δv_1 no perigeu, para inserção na órbita de transferência, e um impulso Δv_2 no apogeu, para inserção na órbita circular final. Qual o impulso $\Delta v_{\text{total}} = |\Delta v_1| + |\Delta v_2|$ em m/s necessário para essa manobra?

Solução:

- (a) Uma vez que o satélite orbita a Terra a uma altura $h = 400 \text{ km}$, sua velocidade orbital é dada por

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}}$$

Usando a equação fornecida para a força de arrasto D :

$$D = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{G \cdot M_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)} \cdot C_D \cdot A \Rightarrow \boxed{D \approx 3,04 \times 10^{-3} \text{ N}}$$

- (b) A variação da energia do satélite é igual ao trabalho feito pela força de arrasto. Após o satélite percorrer uma distância Δx ao longo de sua órbita, a variação de energia, e portanto sua taxa de variação temporal será:

$$\Delta E = -D \cdot \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = -D \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Adicionalmente, pela expressão fornecida, temos:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2} \cdot \left(\frac{\Delta r}{\Delta t} \right) \Rightarrow -D \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2} \cdot \left(\frac{\Delta r}{\Delta t} \right)$$

Mas, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ é a velocidade orbital do satélite $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}}$. Logo:

$$-D \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}} = \frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2} \cdot \left(\frac{\Delta r}{\Delta t} \right)$$

E finalmente:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{-2D}{m} \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_{\oplus}}}$$

Uma vez que $r = R_{\oplus} + h$ e $m = 2000$ kg, temos:

$$\boxed{\frac{\Delta r}{\Delta t} \approx -2,69 \times 10^{-3} \text{ m/s}}$$

- (c) Após 90 dias com uma taxa de descida constante de $\frac{\Delta r}{\Delta t} \approx -2,69 \times 10^{-3}$ m/s, teremos:

$$\Delta h = \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \Delta t = (-2,69 \times 10^{-3} \text{ m/s}) \times (90 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s}) \approx -2,09 \times 10^4 \text{ m} = -20,9 \text{ km}$$

Com isso, a nova altitude após 90 dias será:

$$h_{90} = 400 \text{ km} - 20,9 \text{ km} \Rightarrow \boxed{h_{90} = 379,1 \text{ km}}$$

Alternativamente: caso use $\frac{\Delta r}{\Delta t} = -1 \times 10^{-3}$ m/s, a nova altitude será:

$$\boxed{h_{90} = 392,2 \text{ km}}$$

- (d) As órbitas circulares inicial e final terão velocidades v_{90} e v , respectivamente, dadas por:

$$v_{90} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r_{90}}}, \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}}$$

Onde $r_{90} = R_{\oplus} + h_{90}$ e $r = R_{\oplus} + h$.

A órbita elíptica de transferência terá semi-eixo maior a e velocidades $v_{e,perigeu}$ e $v_{e,apogeu}$:

$$a = \frac{r_{90} + r}{2}$$

$$v_{e, \text{ perigeu}} = \sqrt{G \cdot M_{\oplus} \left(\frac{2}{r_{90}} - \frac{1}{a} \right)}, \quad v_{e, \text{ apogeu}} = \sqrt{G \cdot M_{\oplus} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Com isso, os impulsos Δv_1 e Δv_2 são:

$$\Delta v_1 = v_{e, \text{ perigeu}} - v_{90} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r_{90}}} \left(\sqrt{\frac{2r}{r_{90} + r}} - 1 \right)$$

$$\Delta v_2 = v - v_{e, \text{ apogeu}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_{90}}{r_{90} + r}} \right)$$

Uma vez que $h = 400$ km e $h_{90} = 379,1$ km:

$$\Delta v_{total} = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| \approx 11,87 \text{ m/s}$$

Alternativamente: usando $\frac{\Delta r}{\Delta t} = -1 \times 10^{-3} \text{ m/s} \Rightarrow h_{90} = 392,2 \text{ km}$:

$$\Delta v_{total} \approx 4,41 \text{ m/s}$$

Grade de Correção (20 pontos)

- (a) + **2p** indicar corretamente a velocidade orbital para altitude de 400 km: $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)}}$.
 + **1p** encontrar $D \approx 3.04 \times 10^{-3}$ N com unidades.
- (b) + **2,5p** indicar que a variação de energia devido ao arrasto é $\Delta E = -D \cdot \Delta x$.
 + **1p** Indicar que : $\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2} \cdot \left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)$.
 + **0,5p** encontrar $\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \cdot \left(\frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2}\right)^{-1}$.
 + **0,5p** substituir $\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{-D \cdot \Delta x}{\Delta t}$.
 + **1,5p** indicar que $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}}$.
 + **1,5p** expressão final correta: $\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{-2D}{m} \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_{\oplus}}}$.
 + **0,5p** encontrar $\frac{\Delta r}{\Delta t} \approx -2.69 \cdot 10^{-3}$ m/s com unidades.
- (c) + **1,5p** expressão correta para variação de altitude: $\Delta h = \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \Delta t$.
 + **0,5p** encontrar $h_{90} = h - \Delta h$.
- (d) + **0,5p** indicar $v_{90} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r_{90}}}$.
 + **0,5p** indicar $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}}$.
 + **1p** indicar o semieixo maior da órbita de transferência: $a = \frac{r_{90} + r}{2}$.
 + **1p** indicar $v_{e, perigeu} = \sqrt{G \cdot M_{\oplus} \left(\frac{2}{r_{90}} - \frac{1}{a}\right)}$.
 + **1p** indicar $v_{e, apogeu} = \sqrt{G \cdot M_{\oplus} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$.
 + **2p** indicar as expressões corretas para Δv_1 e Δv_2 .
 + **1p** somar os módulos dos dois impulsos e encontrar Δv_{total} com unidades.

Q4. Marés (20 pontos)

A força de maré para um ponto na superfície de um corpo pode ser definida como a diferença entre a força gravitacional aplicada ao centro do corpo e a força gravitacional aplicada ao ponto em questão. Matematicamente, a expressão abaixo define a força de maré:

$$\vec{F}_M = \vec{F}_S - \vec{F}_C$$

$\vec{F}_M$ corresponde à força de maré, $\vec{F}_S$ é a força aplicada no ponto na superfície e $\vec{F}_C$ é a força aplicada no centro do corpo.

No caso da Terra, a Lua é o principal corpo responsável pelas forças de maré. Um fato amplamente conhecido é que as forças de maré têm uma influência significativa nas ondas do mar. Essa questão explora a física e a geometria por trás desse efeito.

As respostas de todos os itens devem ser escritas em função da massa da Lua (M), da distância entre os centros da Terra e da Lua (d), do raio da Terra (R), da constante gravitacional universal (G) e de possíveis parâmetros adicionais mencionados em cada item.

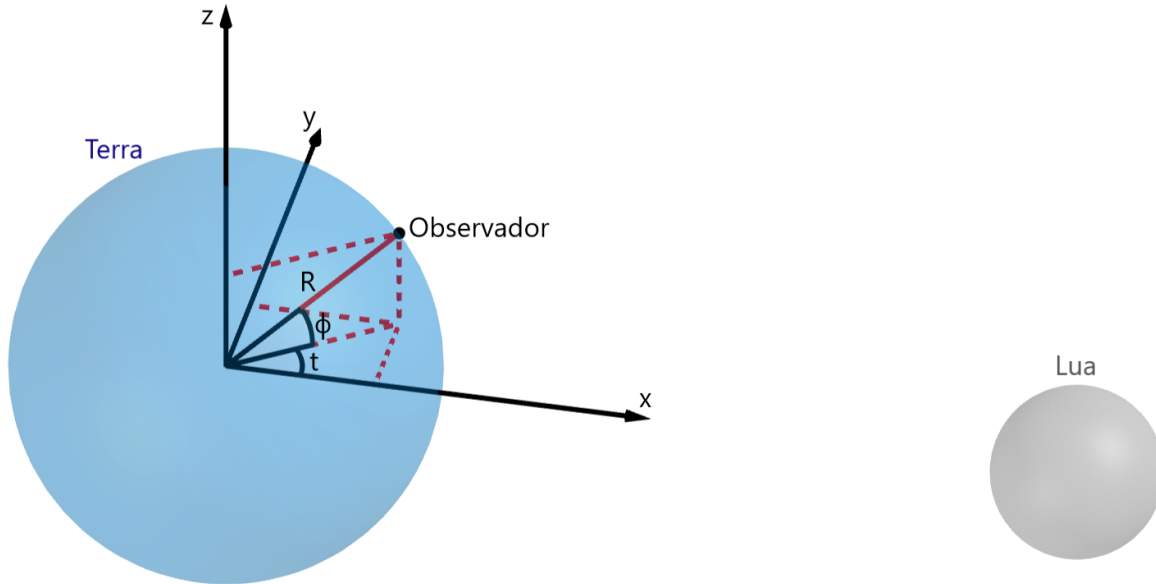
Para todos os itens dessa questão, utilize um sistema de coordenadas com a origem no centro da Terra, o eixo x apontando para a Lua e o eixo z apontando para o Polo Norte.

- (a) **(3 pontos)** Prove que a aceleração de maré para um observador no Equador com a Lua no seu zênite pode ser aproximada pelo seguinte vetor:

$$\left\langle \frac{2GMR}{d^3}, 0, 0 \right\rangle$$

A aproximação $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ para $|xn| \ll 1$ pode ser útil.

- (b) **(3 pontos)** Considere um observador em uma cidade litorânea com latitude ϕ . Determine as coordenadas cartesianas do observador em um horário civil t . Considere que para esse observador a Lua cruzou o meridiano local à meia-noite nesse dia e que a declinação da Lua é nula. A imagem abaixo ilustra a geometria da situação.



Para simplificar as contas, considere que as coordenadas equatoriais da Lua são aproximadamente constantes ao longo do dia e ignore a diferença entre o dia solar médio, o dia sideral e o dia lunar. Com essas aproximações, o horário civil t pode ser simplesmente convertido para uma escala de 0° a 360° e tratado como um ângulo.

- (c) **(1 ponto)** Determine uma expressão para a distância entre o centro da Lua e o observador (d_{LO}) no horário civil t .

As respostas de todos os itens a seguir podem ser escritas em função de d_{LO} , além das variáveis já citadas.

- (d) **(3 pontos)** Determine o vetor unitário que aponta para o centro da Lua partindo da posição do observador no horário civil t .
- (e) **(5 pontos)** Determine o vetor da aceleração de maré que age sobre o observador no horário civil t .

- (f) **(5 pontos)** Considere os seguintes horários civis: $t_1 = 0$ h, $t_2 = 6$ h, $t_3 = 12$ h e $t_4 = 18$ h. Para um observador no Equador, quais desses horários correspondem a marés altas e quais correspondem a marés baixas? Justifique a sua resposta com base na equação obtida no item anterior.

Solução:

- (a) A aceleração em um ponto na superfície da Terra é $a_S = \frac{GM}{(d-R)^2}$. A aceleração no centro da Terra é $a_c = \frac{GM}{d^2}$, logo, a aceleração de maré é: $a_M = a_S - a_c$

$$a_M = \frac{GM}{d^2} - \frac{GM}{(d-R)^2} = \frac{GM}{d^2} - \frac{GM}{d^2 - 2dR + R^2}$$

Como $d \gg R$:

$$\begin{aligned} a_M &= \frac{GM}{d^2} - \frac{GM}{d^2 - 2dR} = \frac{GM}{d^2} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{2R}{d}} \right) \\ &= \frac{GM}{d^2} \left[1 - \left(1 - \frac{2R}{d} \right)^{-1} \right] \end{aligned}$$

Temos que $\frac{2R}{d} \ll 1$, então, podemos usar a aproximação $(1+x)^{-1} = 1-x$:

$$a_M = \frac{GM}{d^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2R}{d} \right) \right]$$

Logo:

$$\begin{aligned} a_M &= \frac{GM}{d^2} \frac{2R}{d} \\ a_M &= \frac{2GMR}{d^3} \end{aligned}$$

Note que nesse caso, o observador, o centro da Terra e o centro da Lua estão no eixo x , então o único componente da aceleração de maré está nesse eixo. O observador está mais perto da Lua, então a aceleração de maré é maior na posição do observador do que no centro da Terra. Isso resulta em um valor positivo para a aceleração de maré no eixo x . Portanto:

$$\vec{a}_M = \left\langle \frac{2GMR}{d^3}, 0, 0 \right\rangle$$

- (b) Utilizando trigonometria para decompor o vetor entre o centro do sistema de coordenadas e o observador:

$$O = (R \cos(\phi) \cos(t), R \cos(\phi) \sin(t), R \sin(\phi))$$

- (c) A Lua está no seguinte ponto:

$$L = (d, 0, 0)$$

A distância entre L e O é a seguinte:

$$d_{LO} = \sqrt{[R \cos(\phi) \cos(t) - d]^2 + [R \cos(\phi) \sin(t)]^2 + [R \sin(\phi)]^2}$$

Note que a expressão a seguir é equivalente e pode ser obtida por meio da lei dos cossenos:

$$d_{LO} = \sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd \cos(\phi) \cos(t)}$$

(d) O vetor unitário na direção da aceleração gravitacional sobre o observador é o seguinte:

$$\hat{u} = \left\langle \frac{d - R \cos(\phi) \cos(t)}{d_{LO}}, -\frac{R \cos(\phi) \sin(t)}{d_{LO}}, -\frac{R \sin(\phi)}{d_{LO}} \right\rangle$$

(e) O módulo da aceleração gravitacional no observador é o seguinte:

$$a_O = \frac{GM}{d_{LO}^2}$$

Dessa forma, o vetor da aceleração gravitacional é o produto do módulo a_O pelo vetor unitário $\hat{u}$:

$$\vec{a}_O = \frac{GM}{d_{LO}^2} \left\langle \frac{d - R \cos(\phi) \cos(t)}{d_{LO}}, -\frac{R \cos(\phi) \sin(t)}{d_{LO}}, -\frac{R \sin(\phi)}{d_{LO}} \right\rangle$$

A aceleração de maré corresponde à diferença entre a aceleração gravitacional na superfície e a aceleração gravitacional no centro da Terra. Portanto:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O - \vec{a}_C$$

No sistema em questão, como a Lua está no eixo x , a aceleração gravitacional causada pela Lua no centro da Terra é a seguinte:

$$\vec{a}_C = \left\langle \frac{GM}{d^2}, 0, 0 \right\rangle$$

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{d - R \cos(\phi) \cos(t)}{d_{LO}^3} - \frac{1}{d^2}, -\frac{R \cos(\phi) \sin(t)}{d_{LO}^3}, -\frac{R \sin(\phi)}{d_{LO}^3} \right\rangle$$

(f) Para um observador no Equador, $\phi = 0^\circ$. Portanto:

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{d - R \cos(t)}{d_{LO}^3} - \frac{1}{d^2}, -\frac{R \sin(t)}{d_{LO}^3}, 0 \right\rangle$$

Caso a aceleração de maré aponte para o zênite, as ondas serão puxadas para cima, causando uma maré alta. Para $t_1 = 0$ h, o zênite se encontra na direção $+x$ e a aceleração de maré é a seguinte:

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{d - R}{d_{LO}^3} - \frac{1}{d^2}, 0, 0 \right\rangle$$

Nesse caso, $d_{LO} = d - R$. Portanto:

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{1}{d_{LO}^2} - \frac{1}{d^2}, 0, 0 \right\rangle$$

Como $d_{LO} < d$ a aceleração aponta para $+x$, assim como o zênite, $t_1 = 0$ h corresponde a uma maré alta.

Para $t_3 = 12$ h, o zênite aponta para $-x$. A aceleração de maré é a seguinte:

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{d+R}{d_{LO}^3} - \frac{1}{d^2}, 0, 0 \right\rangle$$

Como $d_{LO} = d + R$:

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{1}{d_{LO}^2} - \frac{1}{d^2}, 0, 0 \right\rangle$$

Como $d_{LO} > d$, a aceleração de maré aponta para $-x$, assim como o zênite, então $t = 12$ h corresponde a uma maré alta.

Para $t_2 = 6$ h, o zênite aponta pra $+y$. A aceleração de maré é a seguinte:

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{d}{d_{LO}^3} - \frac{1}{d^2}, -\frac{R}{d_{LO}^3}, 0 \right\rangle$$

Nesse caso, $d_{LO} = \sqrt{d^2 + R^2}$, mas o valor exato de d_{LO} não é necessário para identificar se a maré é alta ou baixa.

O componente em y aponta para a direção oposta ao zênite, puxando as ondas para baixo. O outro componente está no horizonte. Portanto, $t_2 = 6$ h corresponde a uma maré baixa. Por simetria, esse também deve ser o caso para $t_4 = 18$ h. Note que nesses casos o componente puxando as ondas para baixo é muito menor que o componente no horizonte.

Dessa forma, as marés altas ocorrem em $t_1 = 0$ h e $t_3 = 12$ h e as marés baixas ocorrem aproximadamente em $t_2 = 6$ h e $t_4 = 18$ h.

Grade de Correção (20 pontos)

- (a) + **3p** obter uma expressão correta para a aceleração de maré.
- (b) + **3p** obter uma expressão correta para a posição do observador (1 ponto para cada coordenada).
- (c) + **1p** obter uma expressão para a distância entre a Terra e a Lua.
- (d) + **3p** determinar o vetor unitário (1 ponto por componente).
- (e) + **1p** determinar o módulo da aceleração gravitacional agindo sobre o observador.
+ **1p** determinar o vetor da aceleração gravitacional agindo sobre o centro da Terra.
+ **3p** determinar o vetor da aceleração de maré (1 ponto para cada componente).
- (f) + **1p** simplificar a expressão corretamente para uma latitude de 0° .
+ **4p** identificar corretamente cada maré alta ou baixa com uma justificativa válida (1 ponto para cada horário). Note que respostas corretas sem uma justificativa matemática válida não receberão nenhum ponto.