

# Instrucciones Generales

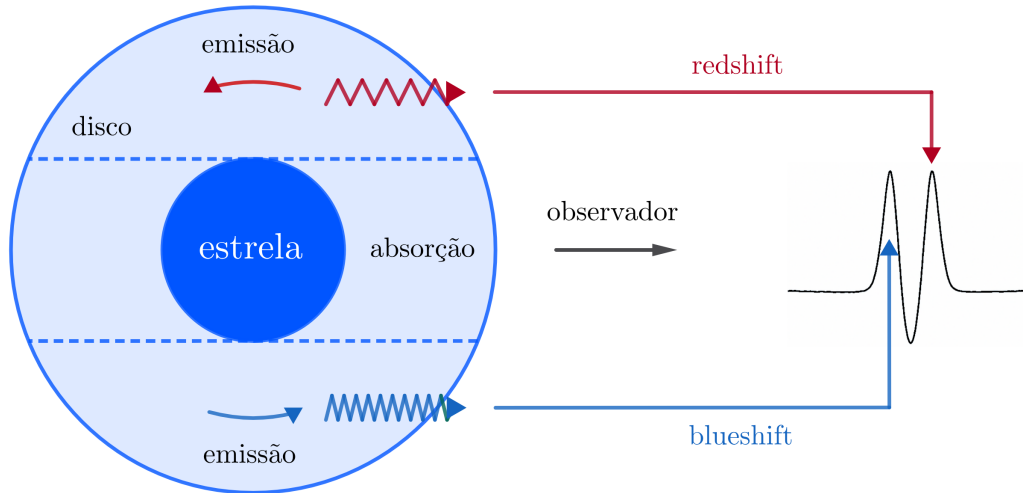
Lea atentamente antes de comenzar la prueba

- Escriba su código de estudiante en la parte superior de cada página.
- Resuelva cada problema en hojas distintas (no más de un problema por hoja). Si utiliza más de una hoja para un mismo problema, escriba claramente el número del problema en cada una y numere las hojas en orden consecutivo. Ejemplo: si el Problema 1 ocupa tres páginas, indique en cada hoja: Problema 1 (1/3), Problema 1 (2/3) y Problema 1 (3/3).
- Presente el procedimiento completo, claro y ordenado en cada solución.
- Las comas (,) son separador decimal.
- Si desea invalidar una parte de la solución, señale explícitamente que no debe ser considerada para la corrección (por ejemplo, mediante una cruz grande o tachando la sección correspondiente).
- Encierre en un recuadro la respuesta final de cada inciso de los problemas.
- Levante la mano para solicitar hojas adicionales o pedir permiso para salir al baño.
- Al finalizar la prueba, verifique que todas las instrucciones anteriores hayan sido cumplidas y entregue sus hojas en el orden correspondiente a los problemas.

*¡Buena suerte!*

## Q1. Disco de gas en Estrellas Be (20 puntos)

Las estrellas de tipo Be son estrellas de clase espectral B caracterizadas por la presencia de líneas de emisión en su espectro debido a un disco delgado de gas alrededor de la estrella, originado por su intensa rotación. En la situación en que el sistema está inclinado con respecto a la línea de visión del observador, la rotación del disco introduce un pico de emisión doble en el espectro debido al efecto Doppler: la parte del disco que se aproxima al observador desplaza la longitud de onda de la línea hacia el azul (*blueshift*), mientras que la parte que se aleja la desplaza hacia el rojo (*redshift*), como muestra el esquema de abajo.



Esquema didáctico del fenómeno de doble pico en el espectro. A la izquierda, tenemos una vista superior del sistema para un disco *edge-on* (inclinación  $i = 90^\circ$ ), con las regiones emisoras responsables del redshift y blueshift que generan el doble pico en el espectro, esbozado a la derecha. Las flechas curvas indican el sentido de rotación del gas. La región entre la estrella y el observador es de absorción, causando el mínimo central en el espectro.

En esta cuestión, analizaremos el espectro de una estrella Be alrededor de la línea de Balmer  $H\alpha$  para estimar la velocidad de rotación del disco y el radio característico de la región emisora. La tabla de abajo contiene datos espectrales de la estrella 88 Her, en términos del flujo normalizado  $F/F_c$  y la longitud de onda  $\lambda$  (en nm).

| $\lambda$ (nm) | $F/F_c$ | $\lambda$ (nm) | $F/F_c$ |
|----------------|---------|----------------|---------|
| 655,40         | 1,03    | 655,50         | 1,10    |
| 655,60         | 1,17    | 655,69         | 1,28    |
| 655,77         | 1,47    | 655,86         | 1,71    |
| 655,93         | 1,82    | 656,01         | 1,66    |
| 656,07         | 1,39    | 656,13         | 1,09    |
| 656,18         | 0,84    | 656,23         | 0,67    |
| 656,28         | 0,57    | 656,33         | 0,66    |
| 656,37         | 0,82    | 656,42         | 1,09    |
| 656,48         | 1,40    | 656,54         | 1,68    |
| 656,61         | 1,77    | 656,68         | 1,69    |
| 656,75         | 1,48    | 656,84         | 1,28    |
| 656,92         | 1,17    | 657,01         | 1,10    |
| 657,10         | 1,04    |                |         |

Considere que el gas del disco se encuentra en **órbita circular kepleriana** alrededor de la estrella, y también que las velocidades del problema son mucho menores que la velocidad de la luz, de forma de **desconsiderar efectos relativistas**. Haga lo que se pide. **Datos:** Inclinación del disco:  $i = 76^\circ$ .  $M_* = 4,45 M_\odot$ .

- (a) **(4 puntos)** Muestre que, debido al efecto Doppler, la diferencia de longitud de onda observada de los picos ( $\Delta\lambda = \lambda_{\text{rojo}} - \lambda_{\text{azul}}$ ) se relaciona con la velocidad de rotación del gas ( $v_{\text{rot}}$ ) y la inclinación ( $i$ ) del sistema con respecto a la línea de visión por

$$\Delta\lambda \approx \frac{2 v_{\text{rot}} \sin i}{c} \lambda_0 ,$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda de reposo de la línea.

- (b) **(9 puntos)** Represente los datos espectrales de la estrella en un gráfico, graficando  $F/F_c$  en función de la longitud de onda  $\lambda$ .
- (c) **(4 puntos)** Con la ayuda de su gráfico, estime  $v_{\text{rot}}$ , en km/s, explicando claramente su método. **Dado:** Inclinación del disco:  $i = 76^\circ$ . Masa de la estrella:  $M_* = 4,45 M_\odot$
- (d) **(3 puntos)** Estime el radio (distancia al centro de la estrella) característico de la región emisora del disco ( $r_{\text{em}}$ ) en km. **Dado:** Masa de la estrella:  $M_* = 4,45 M_\odot$ .

#### Solución:

- (a) Para velocidades  $\ll c$ , el Doppler no relativista nos da

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \simeq \frac{v_r}{c}.$$

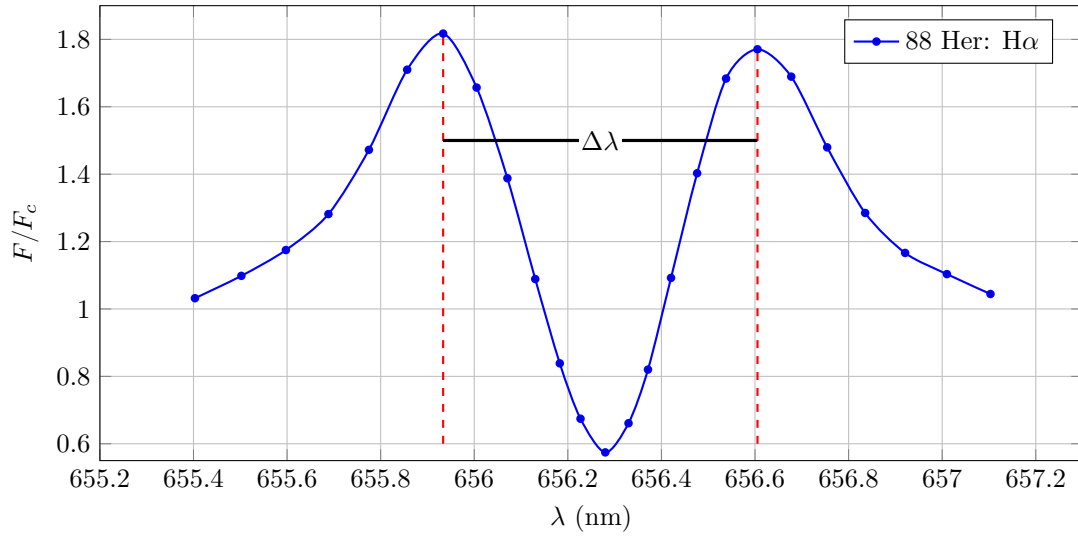
En el anillo emisor, los puntos de mayor módulo de velocidad radial tienen  $v_r = \pm v_{\text{rot}} \sin i$  (proyección de la velocidad tangencial en la línea de visión). Así,

$$\lambda_{\text{azul}} = \lambda_0 \left( 1 - \frac{v_{\text{rot}} \sin i}{c} \right), \quad \lambda_{\text{rojo}} = \lambda_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{rot}} \sin i}{c} \right).$$

Por lo tanto, la separación entre los picos es

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{rojo}} - \lambda_{\text{azul}} = 2\lambda_0 \frac{v_{\text{rot}} \sin i}{c} \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda \approx \frac{2 v_{\text{rot}} \sin i}{c} \lambda_0}.$$

- (b) A continuación, tenemos el gráfico obtenido a partir de los puntos, así como las líneas verticales que representan las posiciones de cada  $\lambda$ :



- (c) A partir de los máximos del perfil (líneas rojas punteadas en el gráfico):  $\lambda_{\text{azul}} \approx 655,93 \text{ nm}$ ,  $\lambda_{\text{rojo}} \approx 656,61 \text{ nm}$ . Por lo tanto,

$$\Delta\lambda \approx \lambda_{\text{rojo}} - \lambda_{\text{azul}} \approx 0,68 \text{ nm}.$$

Obsérvese que también es posible medir  $\Delta\lambda$  directamente del gráfico.

Ahora, de la expresión del ítem (a),

$$v_{\text{rot}} = \frac{c}{2\lambda_0} \frac{\Delta\lambda}{\sin i}.$$

Usando  $c = 2,998 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$ ,  $\lambda_0 = 656,3 \text{ nm}$ ,  $\Delta\lambda = 0,68 \text{ nm}$  e  $i = 76^\circ$ ,

$$v_{\text{rot}} \approx \frac{2,998 \times 10^5}{2 \times 656,3} \frac{0,68}{\sin 76^\circ} \simeq \boxed{1,60 \times 10^2 \text{ km s}^{-1}}.$$

- (d) Asumiendo rotación kepleriana,  $v_{\text{rot}}^2 = \frac{GM_\star}{r_{\text{em}}} \Rightarrow r_{\text{em}} = \frac{GM_\star}{v_{\text{rot}}^2}$ . Con  $GM_\odot = 1,327 \times 10^{11} \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$  y  $M_\star = 4,45 M_\odot$ ,

$$r_{\text{em}} \approx \frac{4,45 \times (1,327 \times 10^{11})}{(1,60 \times 10^2)^2} \simeq \boxed{2,31 \times 10^7 \text{ km}}.$$

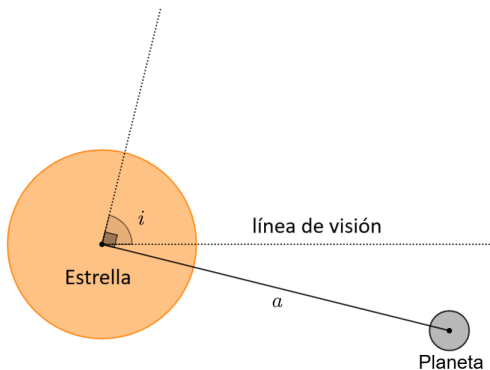
## Escala de Corrección (20 puntos)

- (a) **+1 p** escribir la relación de Doppler no relativista  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \simeq \frac{v_r}{c}$ ..  
**+1 p** expresión de la velocidad radial proyectada  $v_r = \pm v_{\text{rot}} \sin i$ .  
**+1 p** expresión para  $\lambda_{\text{azul}}$  y  $\lambda_{\text{rojo}}$ .  
**+1 p** efectuar la diferencia y obtener la expresión final para  $\Delta\lambda$ .
- (b) **+5 p** puntos graficados correctamente. 0,2 por cada punto.  
**+1 p** eje y nombrado y con escala uniforme en el dominio del conjunto de datos.  
**+1 p** eje x nombrado y con escala uniforme en el dominio del conjunto de datos.  
**+1,5 p** líneas verticales representando cada valor de  $\lambda$  requerido. 0,5 por cada línea.  
**+0,5 p** gráfico con título.
- (c) **+2 p** valor numérico de  $\Delta\lambda = 0,68 \text{ nm}$  obtenido a partir del gráfico o de la tabla.  
**+1 p** expresión para  $v_{\text{rot}}$  aislando la expresión dada en el ítem (a).  
**+1 p** valor numérico final correcto  $v_{\text{rot}} = 1,60 \times 10^2 \text{ km s}^{-1}$ .
- (d) **+2 p** asumir rotación kepleriana y escribir la velocidad de rotación en función de la masa, el radio y la constante gravitacional.  
**+1 p** valor numérico final correcto  $r_{\text{em}} = 2,31 \times 10^7 \text{ km}$ .

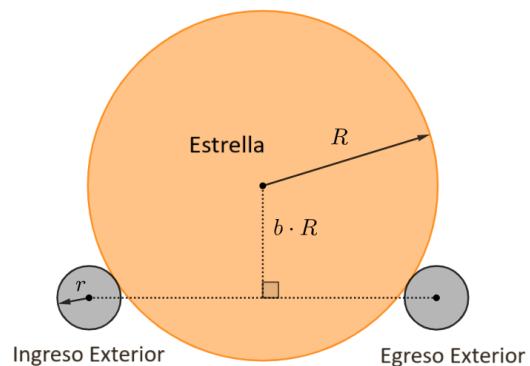
## Q2. Exoplaneta en tránsito y oscurecimiento del limbo (20 puntos)

La estrella HD 209458 fue una de las primeras en las que se detectó la presencia de un planeta por el *método fotométrico de tránsito*, en el cual el flujo luminoso de la estrella anfitriona disminuye cuando el planeta pasa por delante de ella.

El fenómeno puede representarse, de forma simplificada, por las figuras siguientes:



Vista lateral del sistema



Vista frontal del sistema

Vistas esquemáticas del sistema estrella-planeta durante el tránsito

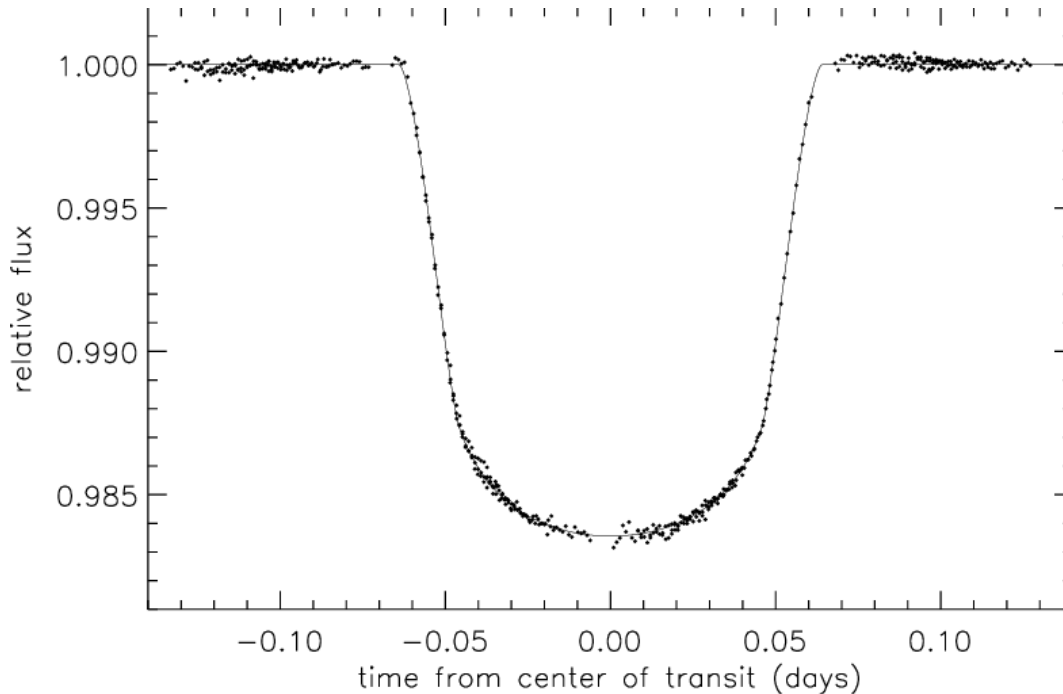
En la notación utilizada,  $r$  es el radio del planeta,  $R$  es el radio de la estrella,  $a$  es el semieje mayor de

la órbita del planeta,  $i$  es el ángulo de inclinación orbital y  $b$  el parámetro de impacto. El parámetro de impacto se define como la distancia mínima, en unidades de radio estelar, entre el centro del disco estelar y la trayectoria proyectada del centro del planeta durante el tránsito. Suponga que la órbita del planeta es circular.

A partir de los diagramas, haga lo que se pide en los siguientes ítems:

- (1,5 puntos) Escriba una expresión para  $b$  como función del semieje mayor de la órbita  $a$ , de la inclinación  $i$  de la misma y del radio  $R$  de la estrella.
- (5 puntos) Deduzca una expresión para el tiempo total de tránsito del planeta, es decir, el intervalo entre el instante en que el planeta toca el borde del disco estelar (ingreso externo) y el instante en que sale completamente del disco (egreso externo), como está representado en la vista frontal del sistema. Escriba su respuesta en función del radio de la estrella  $R$ , del radio del planeta  $r$ , del semieje mayor orbital  $a$ , del parámetro de impacto  $b$ , de la masa  $M$  de la estrella y de la constante gravitacional universal  $G$ .

Observaciones de esta estrella resultaron en la curva de luz mostrada en la figura siguiente. En el gráfico, el eje vertical representa el flujo luminoso normalizado de la estrella, mientras que el eje horizontal muestra el tiempo (en días) con respecto al centro del tránsito.



Curva de luz normalizada del tránsito planetario en HD 209458

Se nota que, incluso cuando el planeta ya está completamente dentro del disco estelar, el flujo observado no se mantiene constante. Esto ocurre debido al **oscurecimiento de borde** (*limb darkening*), fenómeno en el que la intensidad del brillo disminuye desde la región central hacia los bordes del disco estelar.

En la aproximación lineal, la intensidad específica de la estrella puede escribirse como:

$$I(\mu) = I(1) [1 - u(1 - \mu)],$$

donde:

- $I(\mu)$  es la intensidad en una dirección definida por  $\mu = \cos \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo entre la normal local a la superficie estelar y la línea de visión;
- $I(1)$  es la intensidad en el centro del disco estelar ( $\mu = 1$ );
- $u$  es el coeficiente de oscurecimiento de borde, que mide la rapidez con que la intensidad disminuye hacia el limbo.

La intensidad media del disco estelar, considerando esta ley, es:

$$\langle I \rangle = I(1) \left(1 - \frac{u}{3}\right).$$

Para la estrella HD 209458, se tiene  $u = 0,84$  y radio  $R = 1,20 R_{\odot}$ . Además, el parámetro de impacto del planeta que la transita es  $b = 0,59$ .

- (c) **(8,5 puntos)** Usando la profundidad máxima del tránsito en la curva de luz y teniendo en cuenta el oscurecimiento de borde, calcule el radio  $r$  del planeta en unidades de radio terrestre. Use que el radio del planeta es considerablemente menor que el radio de la estrella y que, durante el tránsito, la totalidad del disco planetario entra en el disco estelar.

Ahora, utilizando los parámetros y expresiones obtenidos en los ítems anteriores (deje las respuestas de los próximos ítems en función de  $k \equiv r/R$  en caso de no haber logrado encontrar el radio del planeta), así como la masa de la estrella  $M = 1,15 M_{\odot}$ , determine:

- (d) **(1 punto)** El tiempo total del tránsito planetario (en horas), del ingreso externo al egreso externo (vista frontal).
- (e) **(3 puntos)** El período orbital  $P$  del planeta (en días) y el semieje mayor  $a$  de su órbita (en UA).
- (f) **(1 punto)** La inclinación orbital  $i$  del planeta en grados.

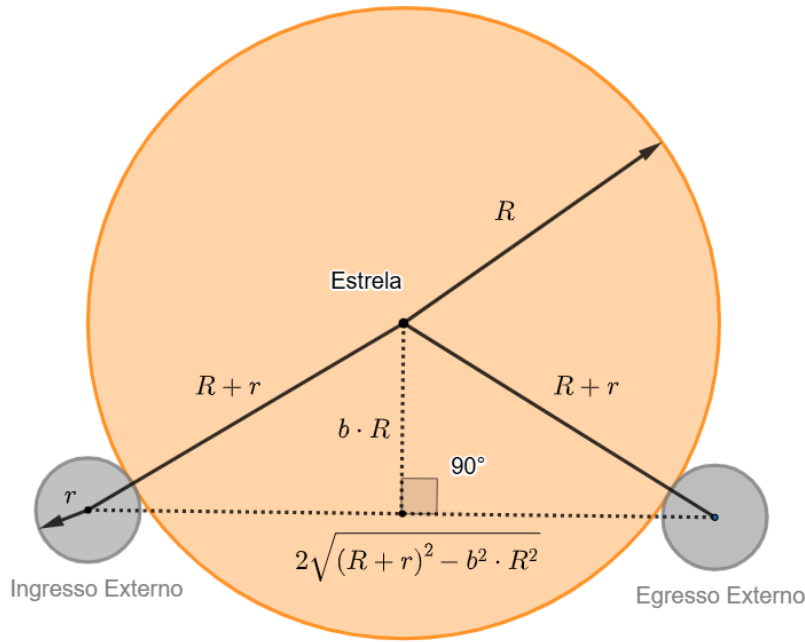
## Solución:

- (a) Para una órbita circular, la distancia proyectada entre los centros en la mitad del tránsito está dada por  $a \cdot \cos i$ . Como  $b$  se da en unidades de radio estelar, tenemos

$$bR = a \cos i$$

$$b = \frac{a \cos i}{R}$$

- (b) Primero, hacemos la representación frontal del sistema como abajo:



Representación frontal del sistema

La longitud de la cuerda interceptada por el planeta es

$$\mathcal{L} = 2\sqrt{(R+r)^2 - b^2 \cdot R^2} = 2R\sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - b^2}.$$

La velocidad orbital del planeta está dada por  $v = \sqrt{GM/a}$  (órbita circular). Así,

$$T = \frac{\mathcal{L}}{v} = \frac{2R}{\sqrt{GM/a}} \sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - b^2}$$

- (c) En la aproximación de planeta pequeño, la profundidad normalizada es el flujo bloqueado sobre el flujo total del disco. El flujo normalizado en el momento de mínimo del tránsito es

$$\Delta F = \frac{F_{\text{estrella}} - F_{\text{transito}}}{F_{\text{estrella}}}$$

$$\Delta F = 1 - \frac{F_{\text{transito}}}{F_{\text{estrella}}}$$

Donde  $F_{\text{estrella}}$  es el flujo total de la estrella sin tránsito y  $F_{\text{transito}}$  es el flujo en el momento del tránsito. Podemos calcular el flujo total de la estrella sin tránsito usando el valor medio de la intensidad del disco  $\langle I \rangle$  usando  $F = I \cdot A$ . De este modo:

$$F_{\text{estrella}} = \langle I \rangle \cdot A = \langle I \rangle \cdot \pi R^2$$

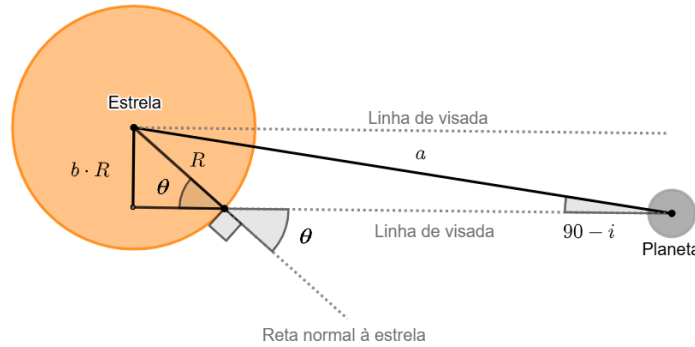
A su vez, el flujo de tránsito  $F_{\text{transito}}$  es el flujo total de la estrella menos la parte que es ocultada por el planeta. Como consideramos el disco planetario mucho menor que el disco estelar, podemos decir que el flujo ocultado por el planeta es  $F_{\text{planeta}} = I(\mu) \cdot \pi r^2$ , donde  $I(\mu)$  es la intensidad del disco estelar en la posición en que se sitúa el planeta. Siendo así,

$$F_{\text{transito}} = F_{\text{estrella}} - F_{\text{planeta}} = \langle I \rangle \cdot \pi R^2 - I(\mu) \cdot \pi r^2$$

Sustituyendo en la expresión para  $\Delta F$  las expresiones para  $F_{\text{estrella}}$  y  $F_{\text{transito}}$  y considerando  $k = r/R$ , podemos escribir:

$$\Delta F \simeq \frac{\pi r^2 I(\mu)}{\pi R^2 \langle I \rangle} = k^2 \frac{I(\mu)}{\langle I \rangle},$$

La imagen de abajo muestra la configuración y la dependencia de  $\mu$  con el parámetro  $b$ :



Representación esquemática lateral del sistema

con  $\mu = \cos \theta = \sqrt{1 - \rho^2}$  y  $\rho = b$  en la mitad del tránsito. Para oscurecimiento de borde lineal,

$$I(\mu) = I(1) [1 - u(1 - \mu)], \quad \langle I \rangle = I(1) \left(1 - \frac{u}{3}\right).$$

Luego,

$$\Delta F = k^2 \frac{1 - u(1 - \mu)}{1 - u/3}, \quad \mu = \sqrt{1 - b^2}.$$

Insertando  $u = 0,84$  y  $b = 0,59$ :

$$\mu = \sqrt{1 - 0,59^2} = 0,8074, \quad \frac{1 - u(1 - \mu)}{1 - u/3} \approx \frac{1 - 0,84(1 - 0,8074)}{1 - 0,84/3} \approx 1,1642.$$

Así, a partir del gráfico, obtenemos  $\Delta F = 0,0163$

$$k^2 = \frac{\Delta F}{1,1642} = \frac{0,0163}{1,1642} = 0,01400 \Rightarrow k = \frac{r}{R} = 0,1183.$$

Como  $R = 1,20 R_{\odot}$  y  $1 R_{\odot} = 109,076 R_{\oplus}$ ,

$$r = kR = 0,1183 \times 1,20 \times 109,076 R_{\oplus} = 15,5 R_{\oplus}.$$

$$\boxed{r \approx 15,5 R_{\oplus}}$$

(d) De acuerdo con el gráfico de la curva de luz, tenemos  $T = 3,05 \text{ h}$

(e) La ecuación de  $T(a)$  arriba (sección b) con el valor observado  $T^{(\text{obs})} = 3,05 \text{ h}$  y los parámetros conocidos ( $R, M, b, r$ ) permite resolver  $a$  (numéricamente):

$$a \approx 0,049 \text{ UA} .$$

Con este  $a$ , por la tercera ley de Kepler,

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \Rightarrow P \approx 3,67 \text{ días} .$$

(f) De  $b = (a \cos i)/R$ ,

$$\cos i = \frac{bR}{a}, \quad i = \arccos\left(\frac{bR}{a}\right) .$$

Con  $b = 0,59$ ,  $R = 1,20 R_{\odot}$  y  $a = 0,049 \text{ UA}$ ,

$$i \approx 86,13^{\circ} .$$

Rúbrica de Corrección (20 puntos)

- (a) **+1 p** Expresión para la distancia proyectada entre los centros  $a \cdot \cos i$ .  
**+0,5 p** Convertir la distancia proyectada a unidades de radio estelar, de modo que  $b = a \cdot \cos i/R$ .
- (b) **+2,5 p** Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud total de la cuerda de la trayectoria de paso del planeta.  
**+1 p** Expresión correcta para la velocidad del planeta en la órbita  $v = \sqrt{GM/a}$ .  
**+1 p** Relación  $T = \mathcal{L}/v$  para el tiempo total de tránsito.  
**+0,5 p** Respuesta final correcta.
- (c) **+1 p** Expresión correcta para  $\Delta F$  en función de  $F_{\text{estrella}}$  y  $F_{\text{transito}}$ .  
**+1 p** Encontrar  $F_{\text{estrella}} = \langle I \rangle \pi R^2$ .  
**+1,5 p** Encontrar  $F_{\text{transito}} = \langle I \rangle \cdot \pi R^2 - I(\mu) \cdot \pi r^2$ .  
**+1 p** Expresión correcta para  $\Delta F = k^2 \frac{I(\mu)}{\langle I \rangle}$ .  
**+0,5 p** Valor de  $\Delta F$  obtenido del gráfico. Intervalo aceptable:  $0,0155 - 0,0170$ .  
**+0,5 p** Figura que representa el ángulo  $\theta$  necesario para el cálculo de  $I(\mu)$ .  
**+1 p** Percibir que en el momento de mínimo del tránsito  $\mu = \cos \theta = \sqrt{1 - b^2}$ .  
**+0,5 p** Valor correcto encontrado para  $\mu \approx 0,8074$ .  
**+0,5 p** Sustitución de los parámetros dados y de  $\mu$  en la expresión para  $\Delta F$  y valor final correcto para  $r = 15,5R_{\oplus}$ . Intervalo aceptable:  $15,1R_{\oplus} - 15,8R_{\oplus}$ .
- (d) **+1 p** A partir del gráfico, capturar  $T_{\text{tránsito}} = 3,05 h$ . Intervalo aceptable:  $2,95 h - 3,15 h$ .
- (e) **+1,5 p** Usar la expresión obtenida en el ítem b) para el tiempo de tránsito  $T$  a fin de obtener  $a$ .  
**+0,25 p** Valor numérico correcto para  $a = 0,049 UA$ . Intervalo aceptable:  $0,045 UA - 0,052 UA$ .  
**+1 p** Usar la tercera ley de Kepler para relacionar semieje mayor  $a$  con período  $P$ .  
**+0,25 p** Valor correcto del período  $P = 3,67$  días. Intervalo aceptable:  $3,30$  días  $- 4,10$  días.
- (f) **+0,75 p** Usar la expresión del ítem a) para encontrar la expresión de la inclinación  $i$  en función de los parámetros ya hallados o dados.  
**+0,25 p** Valor numérico correcto para la inclinación  $i = 86,13^\circ$ . Intervalo aceptable:  $85,90^\circ - 86,40^\circ$ .

### Q3. VLS y Satélite en LEO (20 puntos)

El VLS (Vehículo Lanzador de Satélites) es un programa de cohetes brasileño desarrollado con el objetivo de lanzar satélites a la órbita de la Tierra. El VLS pretende poner un satélite de masa  $m = 2000$  kg en una órbita LEO (*Low Earth Orbit*), circular, con altitud  $h = 400$  km. Los satélites en este tipo de órbita están sujetos a un arrastre debido a la atmósfera residual, que se vuelve más intenso en períodos de alta actividad solar, debido al aumento de la densidad atmosférica en ese rango de altitudes.

La fuerza de arrastre que siente el satélite debido a la atmósfera siempre tiene sentido opuesto a su vector velocidad. El módulo de esa fuerza de arrastre  $D$  puede calcularse por:

$$D = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot C_D \cdot A$$

Donde:

$\rho$  – Densidad de la atmósfera.

$v$  – Módulo de la velocidad orbital del satélite.

$C_D$  – Coeficiente de arrastre de la atmósfera (adimensional).

$A$  – Área de referencia del satélite.

- (a) **(3 puntos)** Considerando que el satélite sea colocado en órbita en un período de intensa actividad solar, tal que la densidad de la atmósfera en la altitud de la órbita sea  $\rho = 5,00 \times 10^{-11} \text{ kg/m}^3$ , calcule la intensidad de la fuerza de arrastre  $D$  sufrida por el satélite, en newtons (N). **Datos:**  $C_D = 2,07$  y  $A = 1,00 \text{ m}^2$ .
- (b) **(8 puntos)** Ese arrastre hace que el satélite pierda energía durante su órbita, resultando en una pérdida de altitud. Se da que, para una pequeña variación  $\Delta r$  en su radio orbital  $r$ , la variación correspondiente en la energía total del satélite es

$$\Delta E \approx \frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2} \cdot \Delta r$$

Siendo  $M_{\oplus}$  la masa de la Tierra. Con esto calcule, en m/s, la velocidad con la que el satélite se aproxima a la Tierra (esto es, la tasa de variación instantánea de su radio orbital,  $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ ) cuando está a una altitud de  $h = 400 \text{ km}$ .

- (c) **(2 puntos)** Suponiendo que la tasa de descenso del satélite obtenida en el ítem anterior es constante, ¿cuál es la nueva altitud  $h_{90}$  del satélite tras 90 días en órbita? En caso de no haber resuelto el ítem anterior, considere que  $\frac{\Delta r}{\Delta t} = -1 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ .
- (d) **(7 puntos)** Para recolocar el satélite en la órbita circular original de altitud  $h = 400 \text{ km}$ , se emplea una órbita elíptica de transferencia (conocida como órbita de transferencia de Hohmann). Esa órbita elíptica tiene perigeo en el radio de la órbita inicial ( $r_{90} = R_{\oplus} + h_{90}$ ) y apogeo en el radio de la órbita final ( $r = R_{\oplus} + h$ ). La maniobra requiere que el satélite reciba un impulso  $\Delta v_1$  en el perigeo, para la inserción en la órbita de transferencia, y un impulso  $\Delta v_2$  en el apogeo, para la inserción en la órbita circular final. ¿Cuál es el impulso  $\Delta v_{\text{total}} = |\Delta v_1| + |\Delta v_2|$  en m/s necesario para esa maniobra?

### Solución:

- (a) Dado que el satélite orbita la Tierra a una altura  $h = 400 \text{ km}$ , su velocidad orbital es

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)}}$$

Usando la ecuación dada para la fuerza de arrastre  $D$ :

$$D = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{G \cdot M_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)} \cdot C_D \cdot A \Rightarrow \boxed{D \approx 3,04 \times 10^{-3} \text{ N}}$$

- (b) La variación de la energía del satélite es igual al trabajo hecho por la fuerza de arrastre. Tras recorrer el satélite una distancia  $\Delta x$  a lo largo de su órbita, la variación de energía, y por tanto su tasa de variación temporal, será:

$$\Delta E = -D \cdot \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = -D \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Además, por la expresión dada, tenemos:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2} \cdot \left( \frac{\Delta r}{\Delta t} \right) \Rightarrow -D \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2} \cdot \left( \frac{\Delta r}{\Delta t} \right)$$

Pero  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  es la velocidad orbital del satélite  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}}$ . Luego:

$$-D \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}} = \frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2} \cdot \left( \frac{\Delta r}{\Delta t} \right)$$

Y finalmente:

$$\boxed{\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{-2D}{m} \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_{\oplus}}}}$$

Dado que  $r = R_{\oplus} + h$  y  $m = 2000$  kg, obtenemos:

$$\boxed{\frac{\Delta r}{\Delta t} \approx -2,69 \times 10^{-3} \text{ m/s}}$$

- (c) Tras 90 días con una tasa de descenso constante de  $\frac{\Delta r}{\Delta t} \approx -2,69 \times 10^{-3}$  m/s, tendremos:

$$\Delta h = \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \Delta t = (-2,69 \times 10^{-3} \text{ m/s}) \times (90 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s}) \approx -2,09 \times 10^4 \text{ m} = -20,9 \text{ km}$$

Con ello, la nueva altitud tras 90 días será:

$$h_{90} = 400 \text{ km} - 20,9 \text{ km} \Rightarrow \boxed{h_{90} = 379,1 \text{ km}}$$

**Alternativamente:** si usa  $\frac{\Delta r}{\Delta t} = -1 \times 10^{-3}$  m/s, la nueva altitud será:

$$\boxed{h_{90} = 392,2 \text{ km}}$$

- (d) Las órbitas circulares inicial y final tendrán velocidades  $v_{90}$  y  $v$ , respectivamente:

$$v_{90} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r_{90}}}, \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}}$$

Donde  $r_{90} = R_{\oplus} + h_{90}$  y  $r = R_{\oplus} + h$ .

La órbita elíptica de transferencia tendrá semieje mayor  $a$  y velocidades  $v_{e, \text{perigeo}}$  y  $v_{e, \text{apogeo}}$ :

$$a = \frac{r_{90} + r}{2}$$

$$v_{e, \text{ perigeo}} = \sqrt{G \cdot M_{\oplus} \left( \frac{2}{r_{90}} - \frac{1}{a} \right)}, \quad v_{e, \text{ apogeo}} = \sqrt{G \cdot M_{\oplus} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Con esto, los impulsos  $\Delta v_1$  y  $\Delta v_2$  son:

$$\Delta v_1 = v_{e, \text{ perigeo}} - v_{90} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r_{90}}} \left( \sqrt{\frac{2r}{r_{90} + r}} - 1 \right)$$

$$\Delta v_2 = v - v_{e, \text{ apogeo}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_{90}}{r_{90} + r}} \right)$$

Dado  $h = 400 \text{ km}$  y  $h_{90} = 379,1 \text{ km}$ :

$$\Delta v_{\text{total}} = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| \approx 11,87 \text{ m/s}$$

**Alternativamente:** usando  $\frac{\Delta r}{\Delta t} = -1 \times 10^{-3} \text{ m/s} \Rightarrow h_{90} = 392,2 \text{ km}$ :

$$\Delta v_{\text{total}} \approx 4,41 \text{ m/s}$$

Rúbrica de Corrección (20 puntos)

- (a) + **2p** indicar correctamente la velocidad orbital para altitud de 400 km:  $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)}}$ .  
 + **1p** obtener  $D \approx 3,04 \times 10^{-3}$  N con unidades.
- (b) + **2,5p** indicar que la variación de energía debida al arrastre es  $\Delta E = -D \cdot \Delta x$ .  
 + **1p** indicar que  $\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2} \cdot \left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)$ .  
 + **0,5p** obtener  $\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \cdot \left(\frac{G \cdot M_{\oplus} \cdot m}{2r^2}\right)^{-1}$ .  
 + **0,5p** sustituir  $\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{-D \cdot \Delta x}{\Delta t}$ .  
 + **1,5p** indicar que  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}}$ .  
 + **1,5p** expresión final correcta:  $\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{-2D}{m} \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_{\oplus}}}$ .  
 + **0,5p** obtener  $\frac{\Delta r}{\Delta t} \approx -2,69 \cdot 10^{-3}$  m/s con unidades.
- (c) + **1,5p** expresión correcta para variación de altitud:  $\Delta h = \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \Delta t$ .  
 + **0,5p** obtener  $h_{90} = h - \Delta h$ .
- (d) + **0,5p** indicar  $v_{90} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r_{90}}}$ .  
 + **0,5p** indicar  $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r}}$ .  
 + **1p** indicar el semieje mayor de la órbita de transferencia:  $a = \frac{r_{90} + r}{2}$ .  
 + **1p** indicar  $v_{e, \text{ perigeo}} = \sqrt{G \cdot M_{\oplus} \left(\frac{2}{r_{90}} - \frac{1}{a}\right)}$ .  
 + **1p** indicar  $v_{e, \text{ apogeo}} = \sqrt{G \cdot M_{\oplus} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$ .  
 + **2p** indicar las expresiones correctas para  $\Delta v_1$  y  $\Delta v_2$ .  
 + **1p** sumar los módulos de ambos impulsos y obtener  $\Delta v_{\text{total}}$  con unidades.

#### Q4. Mareas (20 puntos)

La fuerza de marea para un punto en la superficie de un cuerpo puede definirse como la diferencia entre la fuerza gravitacional aplicada en el centro del cuerpo y la fuerza gravitacional aplicada en el punto en cuestión. Matemáticamente, la siguiente expresión define la fuerza de marea:

$$\vec{F}_M = \vec{F}_S - \vec{F}_C$$

$\vec{F}_M$  corresponde a la fuerza de marea,  $\vec{F}_S$  es la fuerza aplicada en el punto de la superficie y  $\vec{F}_C$  es la fuerza aplicada en el centro del cuerpo.

En el caso de la Tierra, la Luna es el principal cuerpo responsable de las fuerzas de marea. Un hecho ampliamente conocido es que las fuerzas de marea tienen una influencia significativa en las olas del mar. Esta cuestión explora la física y la geometría detrás de este efecto.

Las respuestas de todos los ítems deben ser escritas en función de la masa de la Luna ( $M$ ), de la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna ( $d$ ), del radio de la Tierra ( $R$ ), de la constante gravitacional universal ( $G$ ) y de posibles parámetros adicionales mencionados en cada ítem.

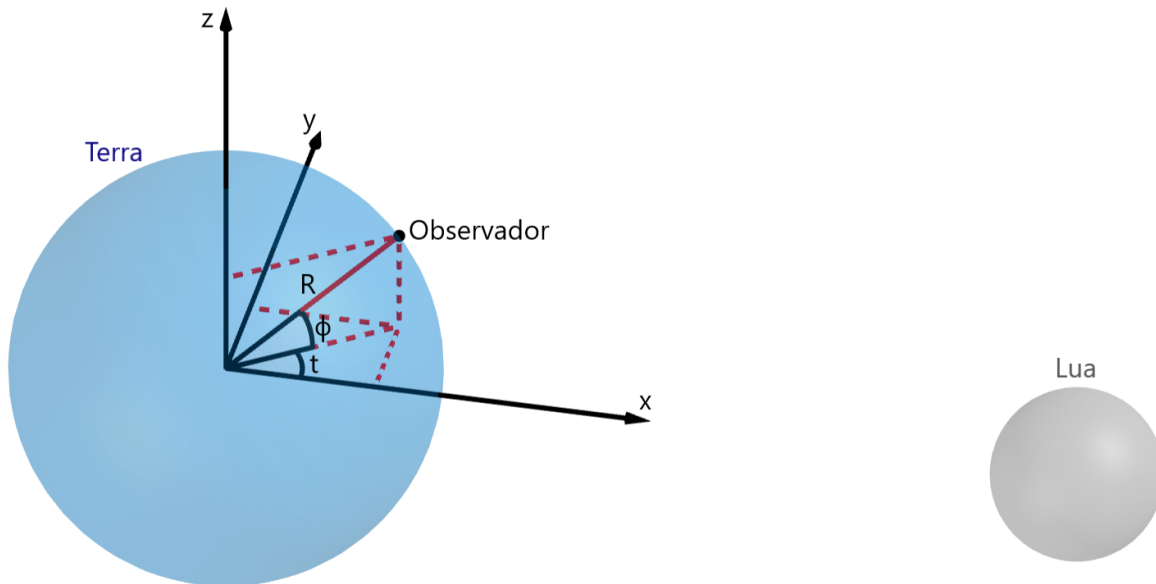
Para todos los ítems de esta cuestión, utilice un sistema de coordenadas con el origen en el centro de la Tierra, el eje  $x$  apuntando hacia la Luna y el eje  $z$  apuntando hacia el Polo Norte.

- (a) **(3 puntos)** Demuestre que la aceleración de marea para un observador en el Ecuador con la Luna en su cenit puede ser aproximada por el siguiente vector:

$$\left\langle \frac{2GMR}{d^3}, 0, 0 \right\rangle$$

La aproximación  $(1+x)^n \approx 1+nx$  para  $|xn| \ll 1$  puede ser útil.

- (b) **(3 puntos)** Considere un observador en una ciudad costera con latitud  $\phi$ . Determine las coordenadas cartesianas del observador en un horario civil  $t$ . Considere que para este observador la Luna cruzó el meridiano local a la medianoche de ese día y que la declinación de la Luna es nula. La imagen abajo ilustra la geometría de la situación.



Para simplificar los cálculos, considere que las coordenadas ecuatoriales de la Luna son aproximadamente constantes a lo largo del día e ignore la diferencia entre el día solar medio, el día sideral y el día lunar. Con estas aproximaciones, el horario civil  $t$  puede ser simplemente convertido en un ángulo de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .

- (c) **(1 punto)** Determine una expresión para la distancia entre el centro de la Luna y el observador ( $d_{LO}$ ) en el horario civil  $t$ .

Las respuestas de todos los ítems a continuación pueden ser escritas en función de  $d_{LO}$ , además de las variables ya citadas.

- (d) **(3 puntos)** Determine el vector unitario que apunta hacia el centro de la Luna partiendo de la posición del observador en el horario civil  $t$ .
- (e) **(5 puntos)** Determine el vector de la aceleración de marea que actúa sobre el observador en el horario civil  $t$ .

- (f) **(5 puntos)** Considere los siguientes horarios civiles:  $t_1 = 0$  h,  $t_2 = 6$  h,  $t_3 = 12$  h y  $t_4 = 18$  h. Para un observador en el Ecuador, ¿cuáles de esos horarios corresponden a mareas altas y cuáles a mareas bajas? Justifique su respuesta en base a la ecuación obtenida en el ítem anterior.

**Solución:**

- (a) La aceleración en un punto en la superficie de la Tierra es  $a_S = \frac{GM}{(d-R)^2}$ . La aceleración en el centro de la Tierra es  $a_c = \frac{GM}{d^2}$ , luego, la aceleración de marea es:  $a_M = a_S - a_C$

$$a_M = \frac{GM}{d^2} - \frac{GM}{(d-R)^2} = \frac{GM}{d^2} - \frac{GM}{d^2 - 2dR + R^2}$$

Como  $d \gg R$ :

$$\begin{aligned} a_M &= \frac{GM}{d^2} - \frac{GM}{d^2 - 2dR} = \frac{GM}{d^2} \left( 1 - \frac{1}{1 - \frac{2R}{d}} \right) \\ &= \frac{GM}{d^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2R}{d} \right)^{-1} \right] \end{aligned}$$

Tenemos que  $\frac{2R}{d} \ll 1$ , entonces, podemos usar la aproximación  $(1+x)^{-1} = 1-x$ :

$$a_M = \frac{GM}{d^2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2R}{d} \right) \right]$$

Luego:

$$\begin{aligned} a_M &= \frac{GM}{d^2} \frac{2R}{d} \\ a_M &= \frac{2GMR}{d^3} \end{aligned}$$

Nótese que en este caso, el observador, el centro de la Tierra y el centro de la Luna están en el eje  $x$ , entonces el único componente de la aceleración de marea está en este eje. El observador está más cerca de la Luna, entonces la aceleración de marea es mayor en la posición del observador que en el centro de la Tierra. Esto resulta en un valor positivo para la aceleración de marea en el eje  $x$ . Por lo tanto:

$$\vec{a}_M = \left\langle \frac{2GMR}{d^3}, 0, 0 \right\rangle$$

- (b) Utilizando trigonometría para descomponer el vector entre el centro del sistema de coordenadas y el observador:

$$O = (R \cos(\phi) \cos(t), R \cos(\phi) \sin(t), R \sin(\phi))$$

- (c) La Luna está en el siguiente punto:

$$L = (d, 0, 0)$$

La distancia entre  $L$  y  $O$  es la siguiente:

$$d_{LO} = \sqrt{[R \cos(\phi) \cos(t) - d]^2 + [R \cos(\phi) \sin(t)]^2 + [R \sin(\phi)]^2}$$

Nótese que la expresión siguiente es equivalente y puede obtenerse mediante la ley de los cosenos:

$$d_{LO} = \sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd \cos(\phi) \cos(t)}$$

(d) El vector unitario en la dirección de la aceleración gravitacional sobre el observador es el siguiente:

$$\hat{u} = \left\langle \frac{d - R \cos(\phi) \cos(t)}{d_{LO}}, -\frac{R \cos(\phi) \sin(t)}{d_{LO}}, -\frac{R \sin(\phi)}{d_{LO}} \right\rangle$$

(e) El módulo de la aceleración gravitacional en el observador es el siguiente:

$$a_O = \frac{GM}{d_{LO}^2}$$

De esta forma, el vector de la aceleración gravitacional es el producto del módulo  $a_O$  por el vector unitario  $\hat{u}$ :

$$\vec{a}_O = \frac{GM}{d_{LO}^2} \left\langle \frac{d - R \cos(\phi) \cos(t)}{d_{LO}}, -\frac{R \cos(\phi) \sin(t)}{d_{LO}}, -\frac{R \sin(\phi)}{d_{LO}} \right\rangle$$

La aceleración de marea corresponde a la diferencia entre la aceleración gravitacional en la superficie y la aceleración gravitacional en el centro de la Tierra. Por lo tanto:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O - \vec{a}_C$$

En el sistema en cuestión, como la Luna está en el eje  $x$ , la aceleración gravitacional causada por la Luna en el centro de la Tierra es la siguiente:

$$\vec{a}_C = \left\langle \frac{GM}{d^2}, 0, 0 \right\rangle$$

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{d - R \cos(\phi) \cos(t)}{d_{LO}^3} - \frac{1}{d^2}, -\frac{R \cos(\phi) \sin(t)}{d_{LO}^3}, -\frac{R \sin(\phi)}{d_{LO}^3} \right\rangle$$

(f) Para un observador en el Ecuador,  $\phi = 0^\circ$ . Por lo tanto:

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{d - R \cos(t)}{d_{LO}^3} - \frac{1}{d^2}, -\frac{R \sin(t)}{d_{LO}^3}, 0 \right\rangle$$

En caso de que la aceleración de marea apunte hacia el cenit, las olas serán empujadas hacia arriba, causando una marea alta. Para  $t_1 = 0$  h, el cenit se encuentra en la dirección  $+x$  y la aceleración de marea es la siguiente:

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{d - R}{d_{LO}^3} - \frac{1}{d^2}, 0, 0 \right\rangle$$

En este caso,  $d_{LO} = d - R$ . Por lo tanto:

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{1}{d_{LO}^2} - \frac{1}{d^2}, 0, 0 \right\rangle$$

Como  $d_{LO} < d$  la aceleración apunta hacia  $+x$ , así como el cenit,  $t_1 = 0$  h corresponde a una marea alta.

Para  $t_3 = 12$  h, el cenit apunta hacia  $-x$ . La aceleración de marea es la siguiente:

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{d+R}{d_{LO}^3} - \frac{1}{d^2}, 0, 0 \right\rangle$$

Como  $d_{LO} = d + R$ :

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{1}{d_{LO}^2} - \frac{1}{d^2}, 0, 0 \right\rangle$$

Como  $d_{LO} > d$ , la aceleración de marea apunta hacia  $-x$ , así como el cenit, entonces  $t = 12h$  corresponde a una marea alta.

Para  $t_2 = 6$  h, el cenit apunta hacia  $+y$ . La aceleración de marea es la siguiente:

$$\vec{a}_M = GM \left\langle \frac{d}{d_{LO}^3} - \frac{1}{d^2}, -\frac{R}{d_{LO}^3}, 0 \right\rangle$$

En este caso,  $d_{LO} = \sqrt{d^2 + R^2}$ , pero el valor exacto de  $d_{LO}$  no es necesario para identificar si la marea es alta o baja.

El componente en  $y$  apunta hacia la dirección opuesta al cenit, empujando las olas hacia abajo. El otro componente está en el horizonte. Por lo tanto,  $t_2 = 6$  h corresponde a una marea baja. Por simetría, este también debe ser el caso para  $t_4 = 18$  h. Nótese que en estos casos el componente que empuja las olas hacia abajo es mucho menor que el componente en el horizonte.

De esta forma, las mareas altas ocurren en  $t_1 = 0$  h y  $t_3 = 12$  h y las mareas bajas ocurren aproximadamente en  $t_2 = 6$  h y  $t_4 = 18$  h.

## Escala de Corrección (20 puntos)

- (a) + **3p** obtener una expresión correcta para la aceleración de marea.
- (b) + **3p** obtener una expresión correcta para la posición del observador (1 punto para cada coordenada).
- (c) + **1p** obtener una expresión para la distancia entre la Tierra y la Luna.
- (d) + **3p** determinar el vector unitario (1 punto por componente).
- (e) + **1p** determinar el módulo de la aceleración gravitacional actuando sobre el observador.
  - + **1p** determinar el vector de la aceleración gravitacional actuando sobre el centro de la Tierra.
  - + **3p** determinar el vector de la aceleración de marea (1 punto para cada componente).
- (f) + **1p** simplificar la expresión correctamente para una latitud de  $0^\circ$ .
  - + **4p** identificar correctamente cada marea alta o baja con una justificación válida (1 punto para cada horario). Nótese que respuestas correctas sin una justificación matemática válida no recibirán ningún punto.