

SOLUCIÓN Prueba Teórica Individual

Olimpiada Latinoamericana de Astrofísica y Astronáutica

2024

Pregunta 1

Describa la contribución de Aristóteles y Ptolomeo a la cosmología y explica cómo sus ideas influenciaron la visión del universo durante la Edad Media. ¿Qué evidencias llevaron finalmente a la aceptación del modelo heliocéntrico propuesto por Copérnico?

Pregunta 2

En 1920, Harlow Shapley y Heber Curtis protagonizaron un famoso debate sobre el tamaño del universo y la naturaleza de las nebulosas espirales. Explique brevemente las posiciones de ambos científicos y cómo la resolución de este debate cambió nuestra comprensión del universo. ¿Qué importancia tiene este evento desde el punto de vista epistemológico?

Problema 1

Venus es uno de los planetas interiores del Sistema Solar, lo que significa que nunca se ve muy lejos del Sol en el cielo.

Considere las distancias promedio de los planetas al Sol, que se muestran en la Tabla 1.

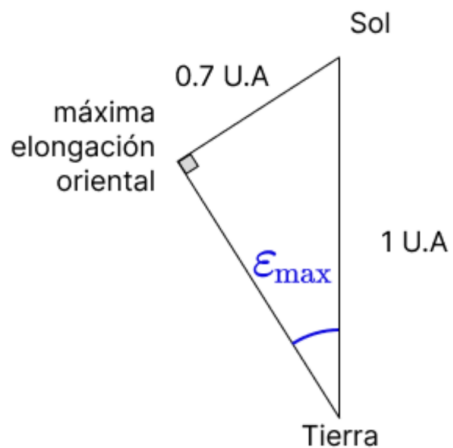
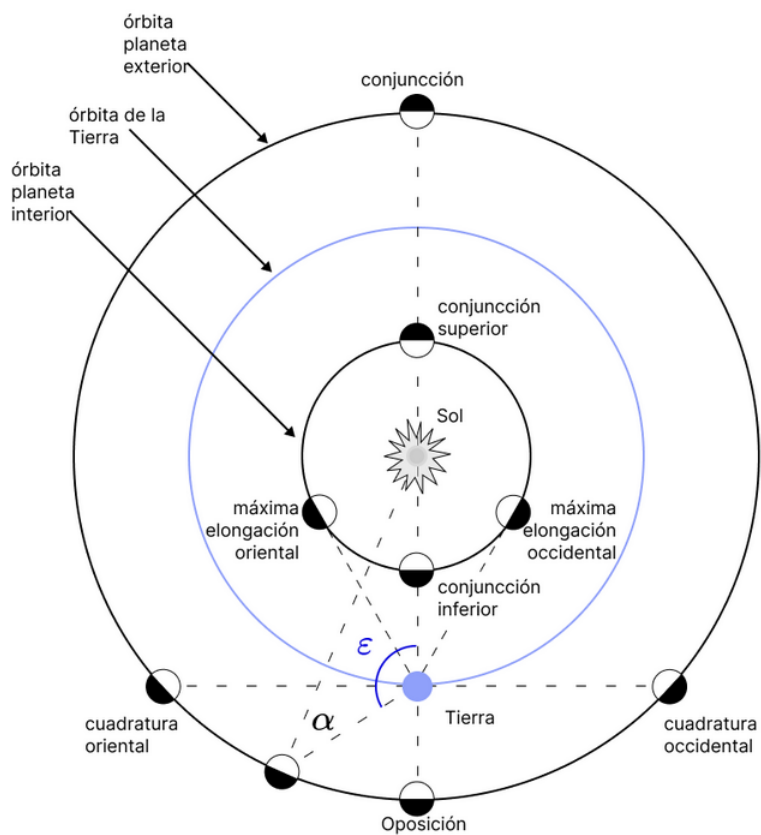
Tabla 1: Distancias promedio de los planetas al Sol.

Planeta	Tamaño orbital (UA)
Mercurio	0.4
Venus	0.7
Tierra	1.0
Marte	1.5
Júpiter	5.2
Saturno	9.5
Urano	19.2
Neptuno	30.1

Determine

- la máxima elongación oriental de Venus.
- el tiempo que le toma a Venus volver a estar en la misma elongación.
- ¿en qué momento es visible para esa elongación?

Solución Problema 1



- a) En la elongación máxima, se cumple que

$$\sin(\epsilon_{max}) = 0,7,$$

de donde $\epsilon_{max} \approx 44,43^\circ$.

- b) El tiempo que le toma a Venus volver a estar en la misma elongación es su tiempo sinódico

$$\frac{1}{S} = \left| \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{Tierra}} \right|$$

A partir de la Tercer ley de Kepler, podemos estimar que

$$T_{Venus} = \sqrt{0,7^3} = 0,5857 \text{ años} = 214 \text{ días}$$

- c) Después de la puesta del Sol.

Problema 2

El cúmulo de las Pléyades contiene $N = 230$ estrellas. Suponga que cada estrella tiene la masa del Sol y que la separación entre cada par de estrellas es, en promedio, igual a dos parsecs.

- Calcule la energía potencial promedio del sistema, $\langle U \rangle$, considerando que hay $N(N - 1)/2$ pares de estrellas.
- El teorema del virial establece que la suma de las energías cinéticas de las estrellas es igual a $-0,5 \langle U \rangle$ (esto se garantiza en un sistema con cierta estabilidad gravitacional). Estime la velocidad típica de las estrellas dentro del cúmulo.
- Calcule la velocidad de escape a una distancia de dos parsecs del centro del cúmulo. La estabilidad garantizada por el teorema del virial debe dar una velocidad típica menor a la velocidad de escape.

Datos necesarios:

-La masa del Sol: $1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$

-La constante gravitacional: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Solución Problema 2

Sea M la masa del sol.

- a) Cada par de estrellas contribuye en una cantidad

$$-\frac{GM^2}{R}$$

a la energía potencial promedio, con $R = 2 \text{ pc}$. Sumando las contribuciones de cada par se obtiene

$$\langle U \rangle = -\frac{GM^2N(N - 1)}{2R}.$$

b) La energía cinética total es

$$K = \frac{1}{2} M v^2 N,$$

por lo que usando el teorema del virial,

$$v^2 = \frac{GM(N-1)}{2R} \approx 496 \text{ m/s.}$$

c) La velocidad de escape es

$$v_e = \sqrt{\frac{2GMN}{R}} \approx 995 \text{ m/s.}$$

Problema 3

Un evento muy importante en la historia de la astronomía fue la utilización de los tránsitos de Venus de 1761 y 1769 para medir la distancia entre el Sol y la Tierra. La razón por la cual el tránsito de Venus puede utilizarse para estimar esta distancia es porque, desde dos puntos diferentes en la Tierra, la silueta de Venus en el Sol se estaría proyectando en dos lugares diferentes. Lograr medir esta diferencia angular de paralaje sería la clave para poder medir la distancia entre el Sol y la Tierra. En este ejercicio, resolveremos un modelo simplificado del que fue utilizado en ese entonces. Para iniciar, vamos a suponer que los centros del Sol, Venus y la Tierra se encuentran colineales, y que las órbitas de Venus y la Tierra son circulares.

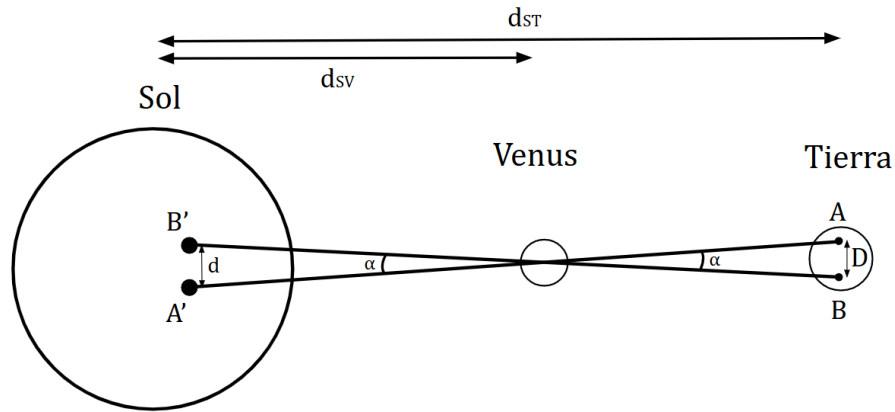


Figura 1: Esquema del paralaje simplificado.

Si bien esto suena muy sencillo, en la realidad esto resulta ser mucho más complicado debido a que la Tierra no es lo suficientemente grande como para que esta diferencia en la posición de la silueta de Venus sea apreciable a simple vista. Por este motivo, lo que se mide es el tiempo que le toma a Venus cruzar el Sol desde ambos puntos en la Tierra. Si bien la diferencia angular entre ambas siluetas no es apreciable, la diferencia temporal en atravesar el Sol sí es algo medible y se puede utilizar para encontrar el valor del ángulo α en la Figura 1.

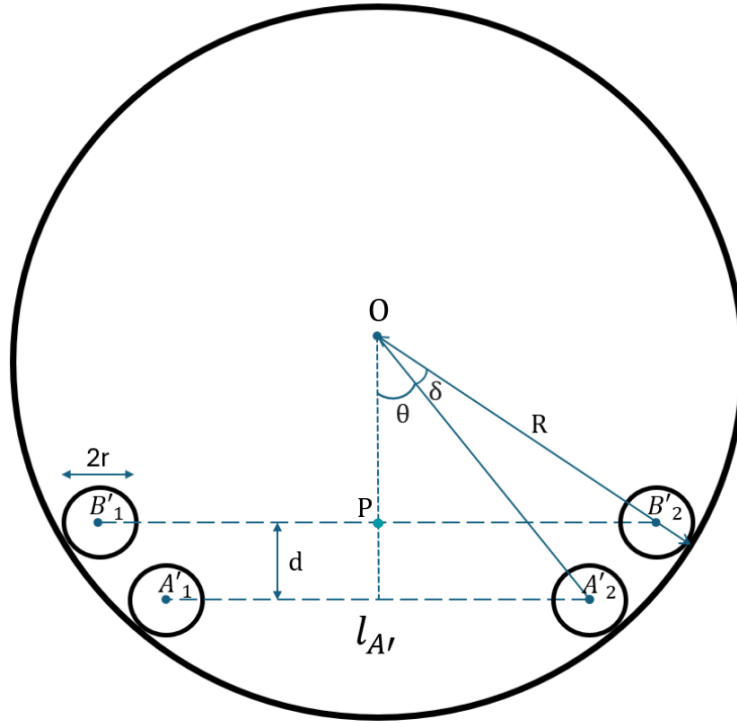


Figura 2: Diagrama de los tránsitos de Venus vistos desde los puntos A y B en la Tierra.

La Figura 2 representa los dos tránsitos de Venus, de radio r , en el Sol de radio R . Visto desde A, la silueta hace una ruta de longitud $l_{A'}$ desde el extremo A'_1 hasta A'_2 . En cambio, visto desde B, la ruta aparente va desde B'_1 hasta B'_2 y es de longitud $l_{B'}$. Como se puede apreciar en la Figura 2, el ángulo $\angle POA'_2$ es de θ , mientras que el ángulo $\angle POB'_2$ tiene un valor de $\theta + \delta$, donde δ es un ángulo muy pequeño.

Nota importante: Para efectos del problema, el ángulo pequeño quiere decir que se usará la aproximación $\cos \delta \approx 1$.

- Si el punto A se encuentra a una latitud de 30°N y el punto B a una latitud de 30°S , encuentre la distancia D . Suponga que ambos puntos se encuentran en la misma longitud y que el radio de la Tierra es de 6371 km.
- Muestre que la distancia d entre las trayectorias en la Figura 2 cumple que

$$d \approx (R - r) \sin \theta \sin \delta.$$

- Muestre que la diferencia de tiempo Δt entre las trayectorias cumple que

$$v\Delta t \approx 2(R - r) \cos \theta \sin \delta,$$

donde v es la rapidez de la silueta de Venus.

- Demuestre que, partiendo de los resultados anteriores, que

$$d \approx (R - r) \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \frac{\Delta t}{t_{A'}},$$

donde $t_{A'}$ es el tiempo que le toma a la silueta de Venus recorrer la trayectoria vista desde A.

Esto nos permite relacionar d con el radio del Sol, el radio de Venus, y cantidades que son posibles medir desde la Tierra como el ángulo θ y los tiempos de tránsito. El siguiente obstáculo con el cual nos encontramos es no tener (en la época) mediciones claras del radio del Sol y del radio de Venus.

Si partimos de que los ángulos que hacen el Sol y Venus en la bóveda celeste son lo suficientemente pequeños, podemos relacionar ángulos en lugar de distancias porque tanto la silueta como el Sol se encuentran a la misma distancia de la Tierra, y concluir que

$$\alpha \approx (\theta_S - \theta_V) \frac{\sin^2 \theta \Delta t}{\cos \theta t_{A'}},$$

donde θ_S y θ_V son los diámetros angulares del Sol y Venus en el cielo, respectivamente.

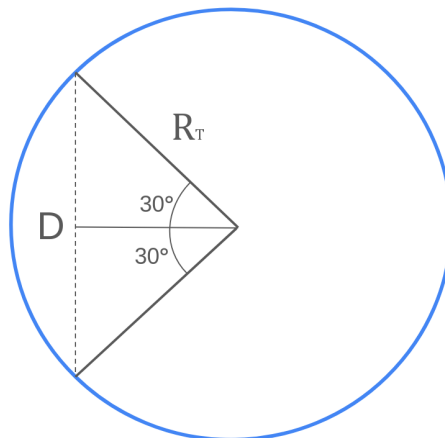
- e) Con ayuda de la Tabla 2, proceda a dar una estimación de la distancia entre la Tierra y el Sol en kilómetros.

Tabla 2: Datos importantes para la estimación de la distancia entre la Tierra y el Sol. T_V y T_T son el periodo orbital de Venus y la Tierra, respectivamente.

Datos	Valores
θ_S	950 as
θ_V	28,8 as
θ	56,23°
$t_{A'}$	19790,5 s
$t_{B'}$	529 s
T_V	224.70 días
T_T	365.2563 días

Solución Problema 3

- a) Como es la misma latitud hacia el Norte y hacia el Sur, y se encuentran en la misma longitud, se puede concluir fácilmente que $D = 2R_T \sin 30^\circ = R_T = 6371$ km.



- b) Llamémosle h_A al cateto vertical del triángulo en la Figura 2 que hace un ángulo de θ , y h_B al triángulo con ángulo de $\theta + \delta$. De esto, se puede concluir que

$$d = h_A - h_B = (R - r) \cos \theta - (R - r) \cos (\theta + \delta).$$

De aquí, se simplifica la expresión y se aplica la aproximación del $\cos \delta$,

$$\begin{aligned} d &= (R - r)(\cos \theta - \cos \theta \cos \delta + \sin \theta \sin \delta) \\ d &\approx (R - r) \sin \theta \sin \delta \end{aligned}$$

- c) Las distancias $l_{A'}$ y $l_{B'}$ cumplen que $l_{A'} = vt_{A'}$ y $l_{B'} = vt_{B'}$. Al mismo tiempo, podemos decir que

$$\begin{aligned} l_{A'} &= 2(R - r) \sin \theta \\ l_{B'} &= 2(R - r) \sin (\theta + \delta). \end{aligned}$$

Por ende, podemos decir que

$$\begin{aligned} v(t_{B'} - t_{A'}) &= 2(R - r)(\sin (\theta + \delta) - \sin \theta) \\ v\Delta t &= 2(R - r)(\sin \theta \cos \delta + \sin \delta \cos \theta - \sin \theta) \\ v\Delta t &\approx 2(R - r) \sin \delta \cos \theta. \end{aligned}$$

- d) Del resultado anterior, podemos decir que

$$\sin \delta \approx \frac{v\Delta t}{2(R - r) \cos \theta}.$$

Evalutando este resultado en la respuesta del inciso a), se obtiene que

$$d \approx \frac{\sin \theta v \Delta t}{2 \cos \theta}$$

Luego, para llegar al resultado pedido, se obtiene v en términos del recorrido a lo largo de la trayectoria A' ,

$$v = \frac{2(R - r) \sin \theta}{t_{A'}},$$

para finalmente obtener que

$$d \approx (R - r) \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \frac{\Delta t}{t_{A'}}.$$

e) Con los datos obtenidos, podemos obtener el valor de α directamente,

$$\alpha \approx (950 \text{ as} - 28,8 \text{ as}) \frac{\sin^2(56,23^\circ)}{\cos(56,23^\circ)} \frac{529 \text{ s}}{19790,5 \text{ s}} \approx 30,61 \text{ as}.$$

Una vez que se tiene el valor de α , podemos decir que

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{D}{2(d_{ST} - d_{SV})}.$$

Con la tercera ley de Kepler, tenemos que

$$\left(\frac{T_V}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{d_{SV}}{d_{ST}}\right)^3$$

Con los datos que nos dieron, podemos decir que

$$d_{SV} = \left(\frac{224,70}{365,2563}\right)^{2/3} d_{ST} \approx 0,723 d_{ST}.$$

por ende,

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{D}{2(0,277 d_{ST})},$$

o bien,

$$d_{ST} \approx \frac{D}{2(0,277) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Evaluando, finalmente se obtiene que

$$d_{ST} \approx \frac{6371 \text{ km}}{2(0,277) \sin\left(\frac{30,61}{2 \times 3600}\right)^\circ} \approx 1,550 \times 10^8 \text{ km}.$$

Como es claro del resultado que α es un ángulo pequeño, también se puede llegar a la respuesta utilizando que

$$d_{ST} \approx \frac{D}{0,277\alpha},$$

con el ángulo en radianes.

Problema 4

Edwin Hubble fue clave en transformar nuestra comprensión del universo. En la década de 1920, descubrió que el universo se extiende mucho más allá de la Vía Láctea al observar galaxias distantes. Más importante aún, descubrió que estas galaxias se alejan unas de otras, lo que llevó a la formulación de la **ley de Hubble**, que establece que cuanto más lejos está una galaxia, más rápido se aleja. Este hallazgo fue la primera evidencia clara de que el universo se está expandiendo, lo que revolucionó la cosmología moderna y apoyó la idea del **Big Bang** como el origen del universo.

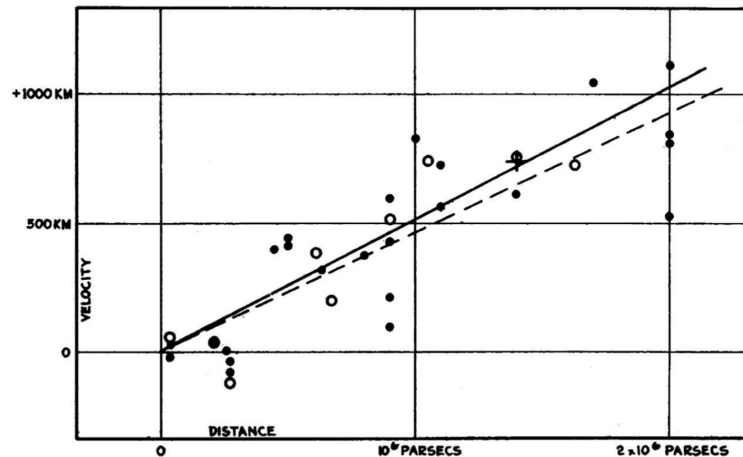


Figura 3: La “Relación entre la Velocidad y la Distancia entre Nebulosas Extragalácticas” original, creada por Edwin Hubble y publicada en las Actas de la Academia Nacional de Ciencias, el 15 de marzo de 1929 15 (3) 168-173; <https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>

Estimaciones modernas ubican el valor de la constante de Hubble entre 67,7 y 74,0 (km/s)/Mpc. El Observatorio Vera V. Rubin detectará millones de supernovas en galaxias anfitrionas que están mucho más lejos y son menos brillantes que las galaxias que se han investigado hasta ahora.

La Figura 4 (**ficticia**) muestra datos de más de mil supernovas y galaxias (como puntos grises) detectadas por el Observatorio Rubin.

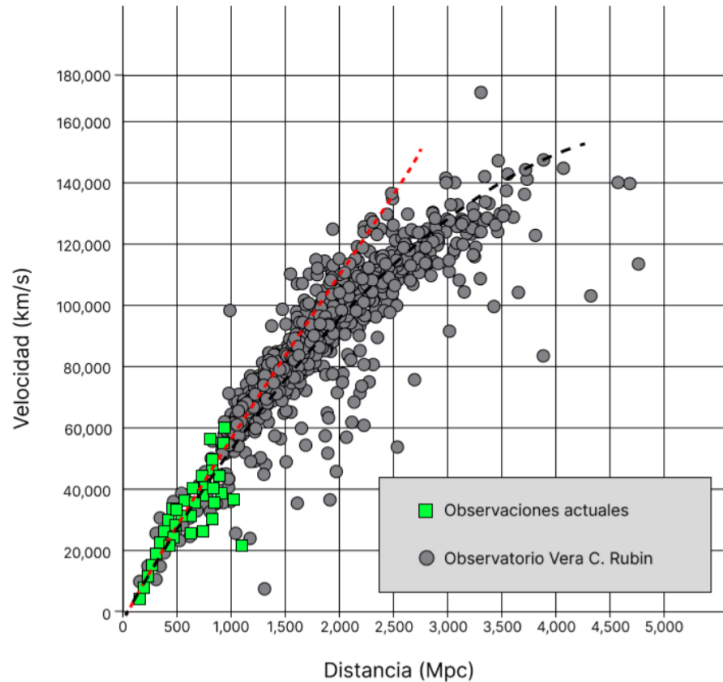


Figura 4: Relación "velocidad vs distancia."^a partir de observaciones del Vera C. Rubin [Adaptado de <https://rubinobservatory.org/es/education/investigations> / <https://expandinguniverse.netlify.app/es/>]

Analice el gráfico anterior y comente

- ¿Cómo se comparan los "datos actuales" con los resultados de Vera C. Rubin?
- ¿Qué sugieren estas mediciones respecto a la velocidad de expansión del Universo con el tiempo?
- ¿Qué conclusiones pueden obtener de la tendencia de los datos para galaxias más lejanas y menos brillantes?

Problema 5

En la astronomía extragaláctica se han encontrado múltiples relaciones que nos permiten intuir propiedades de diferentes tipo de galaxia. Para las de tipo temprano, tenemos por ejemplo la relación radio luminosidad:

$$\log_{10} R_{25} = -0,249M_B - 4,00$$

que relaciona la magnitud absoluta de la banda B y el radio donde se tiene un brillo superficial de $25 \text{ mag} \cdot \text{arcseg}^{-2}$, y la relación Tully Fisher que cambia para diferentes tipos de galaxias tipo temprano. Para sistemas Sa,

$$M_B = 3,15 - 9,95 \log_{10}(v_{\max}),$$

para sistemas Sb,

$$M_B = 2,71 - 10,2 \log_{10}(v_{\max}),$$

y para sistemas Sc,

$$M_B = 3,31 - 11,0 \log_{10}(v_{\max}).$$

NGC 2997 es una galaxia espiral no barrada tipo Sc, localizada en la constelación Antlia y descubierta en 1793. Tiene una magnitud absoluta máxima de $-12,6$ y se supondrá que este valor corresponde a la banda-B.

- Determine el radio del disco donde el nivel superficial de brillo es $25 \text{ mag} \cdot \text{arcseg}^{-2}$.
- Ecompilers/gcc/gnu/5.4.0time la velocidad de rotación de esta galaxia.
- ¿Cuál es la rapidez angular de la galaxia?

Solución Problema 5

- Considere:

$$\log_{10} R_{25} = -0,249 M_B - 4,00.$$

Sustituyendo valores y despejando:

$$R_{25} = 0,137 \text{ kpc.}$$

- La relación de Tully-Fisher es:

$$M_B = 3,31 - 11,0 \log_{10}(v_{\max}).$$

Sustituyendo valores:

$$v_{\max} = 27,950 \text{ km/s.}$$

- La velocidad angular es $\omega = v/R$, usando los valores anteriores, usando la conversión correcta entre parséc y kilómetros:

$$\omega = 6,612 \times 10^{18} \text{ rad/s.}$$