

SOLUCIÓN Prueba Teórica Grupal

Olimpiada Latinoamericana de Astrofísica y Astronómica

2024

Problema 1

El perfil de intensidad radial de una galaxia, de acuerdo a Sérsic, se escribe:

$$\log_{10} \left[\frac{I(r)}{I_e} \right] = -b_n \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right],$$

donde I_e es la intensidad efectiva en un radio r_e , que encierra el 50 % de la luz y b_n es un parámetro relacionado con la forma, $b_n = 1,999n - 0,3271$, $1 < n < 10$. Para el caso del disco de galaxias espirales se describe bien cuando $n = 1$, mientras que en el caso del bulbo se describe bien cuando $n = 4$. Encuentre la diferencia entre la magnitud absoluta y la magnitud efectiva M_e en función de r y r_e . Realice esto tanto para el disco como para el bulbo. Tome que la variación de magnitud absoluta con respecto a la magnitud del Sol es

$$M = M_{\text{sun}} - 2,5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\text{sun}}} \right)$$

y suponga que el área estudiada y el área asociada a la efectiva son iguales.

Solución Problema 1

La intensidad está dada en términos de la luminosidad:

$$I = \frac{L}{A}$$

y la magnitud absoluta con respecto a la Sol:

$$M = M_{\text{sun}} - 2,5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\text{sun}}} \right).$$

Para el caso de la galaxia y efectiva:

$$M - M_{\text{sun}} = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\text{sun}}} \right)$$

$$M_e - M_{\text{sun}} = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L_e}{L_{\text{sun}}} \right).$$

Restando:

$$M - M_e = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_e} \right)$$

$$M - M_e = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L/A}{L_e/A} \right)$$

$$M - M_e = -2,5 \log_{10} \left(\frac{I}{I_e} \right)$$

$$M - M_e = -2,5 \left\{ - (1,999n - 0,3271) \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n} \right] \right\}$$

En el caso de $n = 1$:

$$M - M_e = 4,18 \left[\left(\frac{r}{r_e} \right) - 1 \right]$$

y para $n = 4$:

$$M - M_e = 19,172 \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/4} - 1 \right].$$

Problema 2

Un grupo de jóvenes quiere observar la estrella Vega en una noche clara desde una ciudad situada a una latitud de $\phi = +40^\circ$. Sabiendo que Vega tiene una ascensión recta de 18 horas y una declinación de $\delta = +38^\circ$, determine

- ¿Cuál será el ángulo horario de Vega a las 22:00 horas de tiempo universal (TU) si el tiempo sideral local (TSL) en ese momento es de 16 horas?
- ¿A qué hora cruza Vega el meridiano local?
- La altitud de la estrella Vega en el momento de la observación. Utilice la relación

$$\sin \alpha = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos h.$$

Solución Problema 2

a)

$$h = s - \alpha$$

Donde h , es el ángulo horario, s es el tiempo sideral local y α es la ascensión recta del objeto.

En este caso:

$$s = 16 \text{ horas}$$

$$\alpha = 18 \text{ horas}$$

de donde

$$h = 16 \text{ horas} - 18 \text{ horas} = -2 \text{ horas}$$

Como el ángulo horario se mide positivamente hacia el oeste y negativamente hacia el este, un valor negativo indica que la estrella está al **este** del meridiano local. Convertimos las horas a grados:

$$h = -2 \text{ horas} \times 15^\circ/\text{hora} = -30^\circ.$$

Por lo tanto, el ángulo horario de Vega es -30° , lo que significa que se encuentra a 30° al **este** del meridiano local.

- b) El cruce del meridiano local ocurre cuando el ángulo horario es, es decir, cuando el TSL es igual a la ascensión recta.

Dado que la Ascensión Recta de Vega es 18 horas, Vega cruza el meridiano local a las 18:00 horas TU.

- c) Al sustituir

$$h \approx \arcsin(0,8059) \approx 53,4^\circ.$$

Problema 3

La figura 1 presenta un modelo para explicar el espectro no térmico del remanente de supernova RCW 86, propuesto por M. Ajello et al., 2016, ApJ, 819, 98. Se muestra la distribución espectral de energía, que es igual al producto del cuadrado de la energía de los fotones multiplicado por el espectro diferencial $\frac{dN}{dE}$, en función de la energía de los fotones detectados. Este modelo es conocido como modelo “leptónico” porque supone que la radiación es producida por electrones relativistas que adquieren gran energía en la onda de choque del remanente. Gran parte de la radiación detectada de este objeto, en dicho modelo, se debe a la radiación de sincrotrón (desde el radio hasta los rayos X) de los electrones en un campo magnético. Como se observa, esto corresponde a la “joroba” de la izquierda en la figura. Los mismos electrones que producen la radiación de sincrotrón producen la “joroba” a la derecha de la distribución espectral mostrada (los rayos gamma de muy alta energía), debido a la dispersión inversa de Compton de fotones de la radiación cósmica de fondo de microondas, que ganan energía al chocar con dichos electrones. De esta forma, por ejemplo, los electrones que producen los fotones en el punto máximo del espectro $E^2 \frac{dN}{dE}$ de sincrotrón, producen también los fotones cerca del valor máximo de $E^2 \frac{dN}{dE}$ a altas energías.

Según la teoría de interacción con la onda de choque, la distribución espectral de los electrones relativistas (el número de electrones por unidad de energía, ϵ) está dada por una función

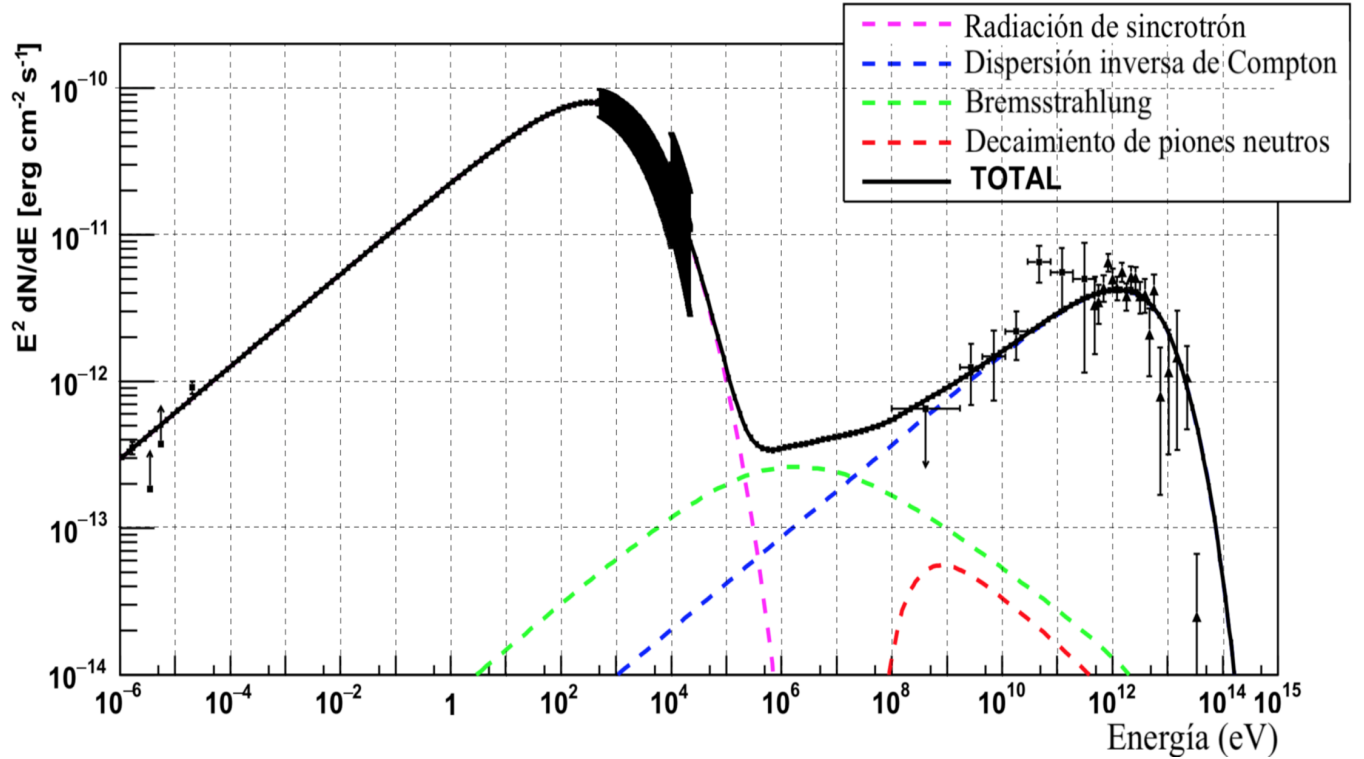


Figura 1: Distribución espectral de energía de RCW 86 medida desde el radio hasta los rayos gamma de muy alta energía (adaptada de M. Ajello et al., 2016, ApJ, 819, 98.), y el modelo “leptónico”.

potencial de la forma

$$F \propto \epsilon^{-p},$$

hasta una energía máxima de las partículas, a partir de la cual F empieza a decaer rápidamente (esta energía máxima podría estar definida por el hecho de que los electrones no han tenido suficiente tiempo para alcanzar energías mayores, o porque la misma radiación que producen se da a una tasa mayor que aquella con la que ganan energía, o bien porque han empezado a escapar de la fuente).

El valor *teórico* de p predicho en el caso más simple (sin tomar en cuenta efectos no lineales), es $p = 2$. La forma de F se ve reflejada en la distribución espectral de los fotones producidos, pues se puede demostrar que, tanto el espectro de sincrotrón como el de la radiación inversa de Compton (flujo de fotones por unidad de área, tiempo y energía), adquieren una dependencia en la energía de los fotones de la forma

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-(p+1)/2},$$

al menos en un rango de energías por debajo de la energía máxima (antes del máximo de la distribución espectral de energía).

a) A partir del espectro mostrado en la figura, estime el valor de p y compararlo con el valor

teórico.

- b) Según las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, la energía máxima de un fotón de sincrotrón típico emitido por un electrón con energía ϵ en un campo magnético B está dada por

$$E_m \sim (1,93 \text{ keV}) \left(\frac{\epsilon}{100 \text{ TeV}} \right)^2 \left(\frac{B}{10 \mu\text{G}} \right).$$

El valor promedio del campo magnético en la zona donde están los electrones relativistas es $B \sim 10 \mu\text{G}$. Usando este valor para el campo magnético, estime el valor de la energía de los electrones que producen el flujo de energía máximo de sincrotrón en RCW 86 en TeV.

- c) Según se explicó, en el modelo leptónico los rayos gamma son producidos por interacciones de los electrones relativistas con radiación de cuerpo negro de Planck a una temperatura $T = 2,73 \text{ K}$ (radiación cósmica de fondo, RCF). Usando relatividad especial se puede demostrar que la relación entre la energía típica de un fotón dispersado (E_f) y su energía inicial antes de interactuar con un electrón (E_i), ambas medidas en el marco de referencia del observador, es

$$E_f \approx \gamma^2 E_i,$$

donde γ es el factor de Lorentz del electrón que dispersa. Suponiendo que la energía típica de un fotón de la RCF es $k_B T$, y usando el resultado del inciso anterior, calcule la energía (en TeV) a la que se da el máximo de la distribución espectral de los rayos gamma, y comparar el resultado con las observaciones.

Datos e información necesaria:

- Constante de Boltzmann: $k_B = 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
- Masa en reposo del electrón: $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$.
- Energía relativista de los electrones: $E = \gamma mc^2$.

Solución Problema 3

- a) La respuesta acá puede variar un poco porque se basa en una estimación a partir de la figura. Del espectro se observa que, antes del decaimiento de la distribución espectral,

$$\log \left(E^2 \frac{dN}{dE} \right) = s \log(E) + b,$$

por lo que la pendiente de la recta se puede obtener con dos pares de valores, por ejemplo

$$(E_1, y_1) \approx (10^{-1}, 2 \times 10^{-11})$$

$$(E_2, y_2) \approx (10^{-3}, 2,5 \times 10^{-12}).$$

Se tiene entonces que

$$s = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(E_2) - \log(E_1)} \approx 0,45.$$

Por lo tanto

$$E^2 \frac{dN}{dE} \propto E^{0,45} \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dE} \propto E^{0,45-2} = E^{-1,55}.$$

De la teoría se espera entonces que

$$1,55 \approx \frac{p+1}{2} \Rightarrow p \approx 2,1$$

Este valor está muy cerca del esperado teóricamente, $p = 2$.

b) Usando el valor $B = 10 \mu\text{G}$ se tiene que

$$E_m \sim (1,93 \text{ keV}) \left(\frac{\epsilon}{100 \text{ TeV}} \right)^2.$$

De nuevo la respuesta no es única porque dependerá del valor estimado a partir de la figura. Si se usa el siguiente valor de energía de los fotones de sincrotrón cerca del máximo de la distribución espectral

$$E_m \approx 0,5 \text{ keV},$$

entonces se obtiene

$$\epsilon \approx 51 \text{ TeV}.$$

c) Los electrones que emiten cerca del máximo flujo de sincrotrón son los mismos que emiten cerca del máximo del flujo de rayos gamma, o sea, tienen una energía típica de 50 TeV, según el cálculo que se hizo en el paso anterior. Esto implica que su factor de Lorentz es

$$\gamma = \frac{50 \text{ TeV}}{mc^2} \approx 9,8 \times 10^7.$$

Con una energía típica de los fotones de la radiación cósmica de fondo,

$$k_B T = 8,617 \times 10^{-5} \cdot 2,73 \text{ eV} \approx 0,000235 \text{ eV},$$

se esperan entonces rayos gamma con energías típicas de

$$\gamma^2 \cdot 0,000235 \text{ eV} \approx 2,2 \text{ TeV}$$

en el punto de máximo de la distribución espectral de la figura, lo cual coincide muy bien pues el modelo y los datos muestran un máximo justo cerca de 10^{12} eV .

Problema 4

El estudio de la evolución de los sistemas binarios estelares ha ganado mucha importancia en la última década por el descubrimiento de las ondas gravitacionales. Sin embargo, estos sistemas se han venido estudiando desde mucho antes. En este ejercicio, exploraremos qué puede pasar con un sistema binario estrecho cuando la estrella más masiva experimenta una explosión de supernova, bajo un modelo simplificado conocido como el *modelo de pérdida de masa instantánea*.

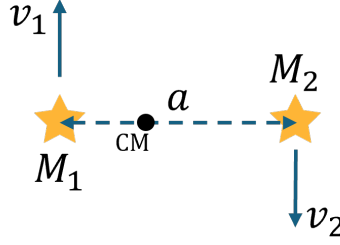


Figura 2: Sistema binario antes de la explosión.

Iniciaremos con un sistema de dos estrellas de masas M_1 y M_2 , orbitando su centro de masa (CM). Se denota al marco de referencia que se encuentra en reposo respecto al CM antes de la explosión $\mathcal{O}$. Diremos que respecto a $\mathcal{O}$, M_1 explosión tiene una rapidez justo antes de la explosión de v_1 , mientras que M_2 tiene una rapidez justo antes de la explosión de v_2 . Además, vamos a definir la cantidad

$$v_{orb}^2 = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a}$$

como la rapidez orbital relativa del sistema, donde a es la mayor separación del sistema. Para simplificar los cálculos, supondremos que las masas justo antes de la explosión tienen una separación de a .

Justo después de la explosión de supernova, como la pérdida de masa de la estrella se aproxima como instantánea, supongamos que en lugar de la estrella de masa M_1 , queda un objeto compacto de masa M_{1f} , y tanto M_{1f} como M_2 mantienen las rapidezces y separación que tenían antes de la explosión. Se denota también como $\mathcal{O}'$ al marco de referencia que se encuentra en reposo respecto al nuevo centro de masa CM' entre M_{1f} y M_2 .

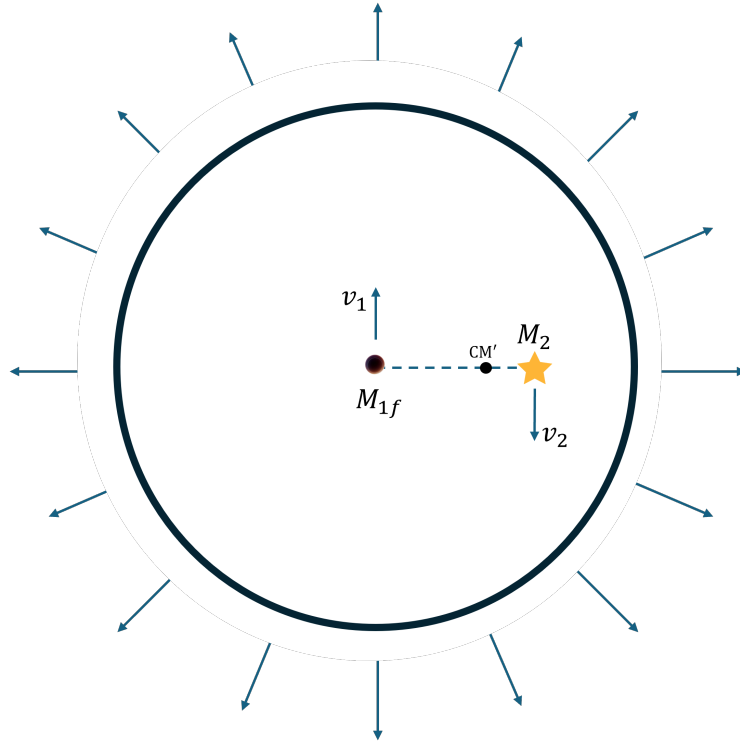


Figura 3: Sistema binario después de la explosión.

- a) Muestre que, visto desde $\mathcal{O}$, las rapidezces v_1 y v_2 cumplen que

$$v_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} v_{orb},$$

$$v_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_{orb}.$$

- b) Muestre que la velocidad de CM' después de la explosión, desde $\mathcal{O}$, cumple que

$$\vec{v}_{CM'} = -\frac{\Delta M}{M_{1f} + M_2} \vec{v}_1,$$

donde ΔM es la masa perdida por M_1 durante la explosión.

- c) Encuentre la energía mecánica del sistema binario después de la explosión en $\mathcal{O}'$, y muestre que se puede simplificar de la forma

$$E_f = -\frac{GM_{1f}M_2}{2a}(2 - \tilde{m}),$$

donde

$$\tilde{m} = \frac{M_1 + M_2}{M_{1f} + M_2}.$$

- d) A partir de los resultados anteriores, encuentre cuál es el mayor porcentaje de masa que puede perder el sistema binario y a la vez mantenerse ligado gravitacionalmente.

Solución Problema 4

a) Partimos de la definición de la rapidez orbital relativa:

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = v_{orb}.$$

Como los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son antiparalelos, se puede concluir que

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = v_1 + v_2 = v_{orb}. \quad (1)$$

Por otro lado, como nos encontramos en $\mathcal{O}$, la rapidez del centro de masa es 0 antes de la explosión, lo que a su vez significa que

$$\frac{M_1 \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2}{M_1 + M_2} = \vec{0} \longrightarrow \vec{v}_2 = -\frac{M_1}{M_2} \vec{v}_1,$$

o bien,

$$v_2 = \frac{M_1}{M_2} v_1. \quad (2)$$

Evaluando (2) en (1), obtenemos que

$$\begin{aligned} v_1 + \frac{M_1}{M_2} v_1 &= v_{orb} \\ v_1 \left(\frac{M_1 + M_2}{M_2} \right) &= v_{orb} \\ v_1 &= \frac{M_2}{M_1 + M_2} v_{orb} \end{aligned}$$

Si de la velocidad del centro de masa se despeja $\vec{v}_1$ en lugar de $\vec{v}_2$ y se evalúa en (1), llegaríamos de la misma manera a que

$$v_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_{orb}$$

b) Después de la explosión, ahora la velocidad del centro de masa sería

$$\vec{v}_{CM} = \frac{M_{1f} \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2}{M_{1f} + M_2},$$

Donde ya sabemos que $\vec{v}_2 = -\frac{M_1}{M_2} \vec{v}_1$. Evaluando,

$$\vec{v}_{CM} = \frac{M_{1f} \vec{v}_1 - M_1 \vec{v}_1}{M_{1f} + M_2} = -\frac{\Delta M}{M_{1f} + M_2} \vec{v}_1.$$

- c) Justo después de la explosión, y visto desde $\mathcal{O}'$, la energía total del sistema estaría dada por

$$E_f = -\frac{GM_{1f}M_2}{a} + \frac{1}{2}M_{1f}v_1'^2 + \frac{1}{2}M_2v_2'^2,$$

donde v_1' y v_2' son las rapidezces de las masas medidas desde $\mathcal{O}'$. Para poder simplificar la expresión de la energía, es necesario expresar estas rapidezces en términos de variables ya conocidas.

Iniciamos con v_1' :

$$\begin{aligned}\vec{v}_1' &= \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} \\ \vec{v}_1' &= \vec{v}_1 + \frac{\Delta M}{M_{1f} + M_2} \vec{v}_1 \\ v_1' &= \left(\frac{M_{1f} + M_2 + M_1 - M_{1f}}{M_{1f} + M_2} \right) v_1 \\ v_1' &= \left(\frac{M_1 + M_2}{M_{1f} + M_2} \right) \frac{M_2}{M_1 + M_2} v_{orb} \\ v_1' &= \frac{M_2}{M_{1f} + M_2} v_{orb}.\end{aligned}$$

Es importante notar que v_{orb} es la rapidez orbital relativa antes de la explosión. Se procede ahora con v_2' :

$$\begin{aligned}\vec{v}_2' &= \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} \\ \vec{v}_2' &= -\frac{M_1}{M_2} \vec{v}_1 + \frac{\Delta M}{M_{1f} + M_2} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2' &= \left(\frac{-M_1M_{1f} - M_1M_2 + M_1M_2 - M_{1f}M_2}{M_2(M_{1f} + M_2)} \right) \vec{v}_1 \\ v_2' &= \left(\frac{M_{1f}(M_1 + M_2)}{M_2(M_{1f} + M_2)} \right) \frac{M_2}{M_1 + M_2} v_{orb} \\ v_2' &= \frac{M_{1f}}{M_{1f} + M_2} v_{orb}\end{aligned}$$

Con estos resultados, se puede simplificar la energía total:

$$\begin{aligned}
E_f &= -\frac{GM_{1f}M_2}{a} + \frac{1}{2}M_{1f}v_1'^2 + \frac{1}{2}M_2v_2'^2 \\
E_f &= -\frac{GM_{1f}M_2}{a} + \frac{1}{2}M_{1f}\left(\frac{M_2}{M_{1f}+M_2}v_{orb}\right)^2 + \frac{1}{2}M_2\left(\frac{M_{1f}}{M_{1f}+M_2}v_{orb}\right)^2 \\
E_f &= -\frac{GM_{1f}M_2}{a} + \frac{1}{2}\frac{M_{1f}M_2}{(M_{1f}+M_2)^2}(M_2+M_{1f})v_{orb}^2 \\
E_f &= -\frac{GM_{1f}M_2}{a} + \frac{1}{2}\frac{M_{1f}M_2}{M_{1f}+M_2}v_{orb}^2.
\end{aligned}$$

Este es un resultado conocido de la mecánica celeste, donde la fracción $\frac{M_{1f}M_2}{M_{1f}+M_2}$ se conoce como la masa reducida del sistema. Para terminar, usamos la definición de la velocidad orbital relativa para obtener que

$$\begin{aligned}
E_f &= -\frac{GM_{1f}M_2}{a} + \frac{1}{2}\frac{M_{1f}M_2}{M_{1f}+M_2}\frac{G(M_1+M_2)}{a} \\
E_f &= -\frac{GM_{1f}M_2}{2a}\left(2 - \frac{M_1+M_2}{M_{1f}+M_2}\right) \\
E_f &= -\frac{GM_{1f}M_2}{2a}(2 - \tilde{m})
\end{aligned}$$

- d) Para que el sistema se encuentre ligado gravitacionalmente, necesitamos que la energía total sea negativa. Para cumplir esto, debe cumplirse que

$$2 - \tilde{m} > 0$$

Acomodando la expresión, se llega a que

$$M_{1f} + M_2 > \frac{1}{2}(M_1 + M_2)$$

Esto significa que, para que el sistema se encuentre gravitacionalmente ligado después de la explosión, se necesita que el sistema no pierda más de un 50 % de la masa.